云南大学学报 (自然科学版), 2006, 28 (4): 281~ 284 CN 53- 1045/N ISSN 0258- 7971
Journal of Yunnan University

Lipschitz 空间的 Cardinal 样条逼近*

杨柱元[1], 刘永平[2]
(1. 云南民族大学 数学与计算机科学学院, 云南 昆明 650031; 2. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

摘要: 给出了 Lipschitz 空间 $Lip(\gamma, L_p)$ 利用多元 Cardinal 样条的逼近和刻画, 给出了 Cardinal 样条逼近算子的 Bernstein 不等式以及 K- 泛函由逼近阶的控制不等式.

关键词: Lipschitz 空间; Cardinal 样条; 逼近
中图分类号: O 174.41 文献标识码: A 文章编号: 0258- 7971(2006)04- 0281- 04

对 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in R^d$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \in N^d$, 定义 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}}$, $x, y \in R^d$ 的内积由 $x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ 定义. $\Phi(R^d)$ 指 R^d 上的无穷可微的速降函数空间, $\Phi'(R^d)$ 为其对偶空间, 即缓增广义函数空间. $\hat{f}$ 指 $f \in \Phi(R^d)$ 的 Fourier 变换, 由下式定义

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{R^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

其逆变换由 $\check{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \hat{f}(-\xi)$ 定义.

$f \in \Phi'(R^d)$ 的广义正, 逆 Fourier 变换由下式定义

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \Phi(R^d).$$

其中 $\langle g, \varphi \rangle$ 表示泛函 $g \in \Phi'(R^d)$ 作用在 $\varphi \in \Phi(R^d)$ 上的值. 当 $g \in L_p(R^d)$, $\langle g, \varphi \rangle := \int_{R^d} g(t) \varphi(t) dt$, $\forall \varphi \in \Phi(R^d)$.

假设 f 和 g 是 R^d 上的 2 个局部可积函数, 称 f 的广义导数 $D^\alpha f = \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ 是 g, 若

$$\int_{R^d} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^d} g(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(R^d),$$

其中 $C_0^\infty(R^d)$ 指具有紧支撑的无穷可微函数空间.

设 $1 \leqslant p < +\infty$, $L_p(R^d)$ 指 R^d 上的 p- 幂可积函数空间, L_∞ 指本性有界函数空间, 它们的范数分别定义为 $\|f\|_p = \left(\int_{R^d} |f(t)| dt\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$; $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{t \in R^d} |f(t)|$.

设 r 是满足 $r > \gamma$ 的最小整数, 即 $r := [\gamma] + 1$. 我们定义 Lipschitz 空间为: $Lip(\gamma, L_p) = \{f \in \Phi'(R^d): f \in L_p(R^d), \omega_r(f, t)_p \leqslant M t^\gamma, M > 0, t > 0\}$, 其中 $\omega_r(f, t)_p = \sup_{|h| \leqslant t} \|\Delta_h^r(f, \cdot)\|_p$, $\Delta_h^r(f, x)$ 表示 f 在点 x 步长为 h 的 r 阶差分. 当 $p = \infty$ 时, 我们由 C 取代 L_∞, $Lip(1, C)$ 为 Zygmund 空间, 关于 Lipschitz 空间的其它方面的研究可参见文献[1] 等.

光滑模 $\omega_r(f, t)_p$ 与 K- 泛函 $K_r(f, t)_p = \inf\{\|f - g\|_p + t^r |g|_{r,p}: g \in W_p^r(R^d)\}$ 有着内在的联系, 事实上它们是等价的, 即 $A\omega_r(f, t)_p \leqslant K_r(f, t)_p \leqslant B\omega_r(f, t)_p$, $A, B > 0$[2], 其中

$$W_p^r(R^d) := \{g \in L_p(R^d): D^\alpha g \in L_p(R^d), |\alpha| \leqslant r \in N^+\},$$

---

* 收稿日期: 2005- 03- 29
基金项目: 云南省教育厅基金资助项目(03Z533D); 国家自然科学基金资助项目(10471010); 北京师范大学"985 项目".
作者简介: 杨柱元(1964-), 男, 白族, 云南人, 博士, 副教授, 主要从事逼近理论方面的研究.

$$\| g \|_{r,p} = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \| D^{\alpha} g \|_p, \quad | g |_{r,p} = \sum_{|\alpha| = r} \| D^{\alpha} g \|_p.$$

令 $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 表示 Laplace 算子, 当 $k > 1$, , $\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1})$.

设 $2m > d+1$, 定义 $m-$ 重调和 Cardinal 样条如下(它们皆为 $\Phi'(R^d)$ 的闭子空间)[3]:

$SH_m(R^d) = \{f \in \Phi'(R^d):(\mathrm{i}) f \in C^{2m-d-1}(R^d), (\mathrm{ii})(\Delta^m f)(x) = 0, x \in R^d \setminus Z^d\}$;

$SH_{m,h}(R^d) = \{f \in \Phi'(R^d):(\mathrm{i}) f \in C^{2m-d-1}(R^d), (\mathrm{ii})(\Delta^m f)(x) = 0, x \in R^d \setminus Z^d\}, (h > 0)$.

Cardinal 样条插值基函数 L_m 由其 Fourier 变换定义如下

$$\hat{L}_m(\xi)(2\pi)^{-d/2} \frac{|\xi|^{-2m}}{\sum_{j \in Z^d} |\xi - 2\pi j|^{-2m}}, (2m > d+1).$$

L_m 具有下列性质:

引理 1[3] (1) $L_m \in SH_m(R^d)$;

(2) $L_m(j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0. \end{cases} \quad j \in Z^d$;

(3) 存在正常数 A 和 a, 其依赖于 d 和 m 但独立于 x, 满足 $| L_m(x) | \leqslant A \cdot \exp(-a | x |)$, $\forall x \in R^d$.

引理 2[3] 设 $v = \{v_j\}_{j \in Z^d}$ 满足 $| v_j | \leqslant (1 + | j |)^{\alpha}$, 是一列多项式增展序列, 其中 $c > 0$, $\alpha > 0$ 与 j 无关, 则存在唯一的 $S(x) \in SH_m(R^d)$, 满足 $S(j) = v_j, j \in Z^d$ 且 $S(x) = \sum_{j \in Z^d} v_j L_m(x-j)$ 在 R^d 的任一紧子集上绝对一致收敛. 若 $v_j = P(j)$, $\forall j \in Z^d$, 其中 $P(x)$ 为 $m-$ 重调和多项式, 则 $S(x) = P(x)$, $\forall x \in R^d$.

令 $\phi \in C_0^{\infty}(R^d)$, 满足 $\mathrm{supp}\,\phi \subset [-1, 1]^d$, $\phi \geqslant 0$, $\int_{R^d} \phi = 1$.

$$\phi_h(x) = \phi(x/h) \cdot h^{-d}, (h > 0).$$

对于 $f \in L_p(R^d)$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $h > 0$, 设 $f_h(x) = \int_{R^d} (f(x) - \Delta_u^r(f, x)) \phi_h(u) \mathrm{d}u$, 其中 Δ_u^r 指 $r-$ 阶差分算子.

引理 3[4] 设 $f \in L_p(R^d)$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 则 $f_h \in C^{\infty}(R^d)$ 且

1°: $\|f_h\|_p \leqslant c_1 \|f\|_p$;

2°: $\|f_h\|_{\infty} \leqslant c_2 h^{-d} \|f\|_p$, $(1 \leqslant p < \infty)$;

3°: $\left(\sum_{v \in Z^d} | f_h(hv) |^p \right)^{1/p} \leqslant c_3 h^{-d/p} \|f\|_p$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$;

4°: 若 $f \in W_p^r(R^d)$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 则 $| f - f_h |_{l,p} \leqslant c_4 h^{r-l} | f |_{r,p}$, 其中 $| g |_{k,p} = \sum_{|\alpha| = k} \| D^{\alpha} g \|_p$.

设 $J_{m,h}(f, x) = \sum_{v \in Z^d} f_h(hv) L_m(x h^{-1} - v)$.

由引理 1, 2, 类似于文献[4] 的证明, 我们有:

定理 1 $f \in W_p^r(R^d)$, 则 $\|f - J_{m,h}(f)\|_p \leqslant c_5 h^r | f |_{r,p}$.

由引理 3 及下列的引理 4, 我们知道 $J_{m,h}(f, \cdot)$ 是映 $L_p(R^d)$ 到 $SH_{m,h}(R^d)$ 的有界线性算子, 因此我们有:

推论 1 $f \in L_p(R^d)$, 则 $\|f - L_{m,h}(f)\|_p \leqslant c_6 K_r(f, h)_p$.

设 $\Psi_m(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \frac{|\xi|^{-2m}}{\left(\sum_{j \in Z^d} |\xi + 2\pi j|^{-4m} \right)^{1/2}}$, 则存在指数衰减序列 $\{b_v\}_{v \in Z^d}$, $\{c_v\}_{v \in Z^d}$, 即 $| b_j | \leqslant C_1 e^{-a_1 |j|}$, $| c_j | \leqslant C_2 e^{-a_2 |j|}$, 其中 C_1, C_2, a_1, a_2 仅依赖于 m, d 满足[5]

$$\Psi_m(x)=\sum_{v\in Z^d}b_v L_m(x-v),\ L_m(x)=\sum_{v\in Z^d}c_v\Psi_m(x-v).\tag{1}$$

注　L_m 具有插值性质而 Ψ 具有整平移正交性质[6].

引理 4　$J_{m,h}(f,x)\in SH_{m,h}(R^d)$ 且 $\|J_{m,h}(f,\cdot)\|_p\cong h^{d/p}(\sum_{v\in Z^d}|f_h(hv)|^p)^{1/p},(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

证明　我们仅证明 $1<p<\infty$ 情形, 其余类似证明.

由 Jensen 不等式和变量替换我们有

(i) $\|J_{m,h}(f)\|_p\leqslant c_7h^{d/p}(\sum_{v\in Z^d}|f_h(hv)|^p)^{1/p}$,

其中 $c_7=\|\sum_{v\in Z^d}|L_m(\cdot+v)|\|_{L_p[0,1]^d}$.

由(1), $J_{m,h}(f,x)=\sum_{v\in Z^d}f_h(hv)L_m(xh^{-1}-v)=\sum_{v\in Z^d}d_v\Psi_m(xh^{-1}-v)$, 其中 $d_v=\sum_{j\in Z^d}f_h(hj)c_{v-j}$. 仿文献[5], 我们有

$$\|J_{m,h}(f)\|_p\cong h^{d/p}\|\{d\}_{v\in Z^d}\|_p.\tag{2}$$

注意到 $f_h(hv)=\sum_{j\in Z^d}d_jb_{v-j}$ 并利用(2), 我们有

(ii) $\|\{f_h(hv)\}_{v\in Z^d}\|_p\leqslant\|\{d_v\}_{v\in Z^d}\|_p\|\{b_v\}_{v\in Z^d}\|_1\leqslant c_8h^{-d/p}\|J_{m.h}(f)\|_p$.

结合(i), (ii), 引理 4 得证. 证毕.

类似于文献[3] 的讨论, 我们知道当 $2m>|\alpha|+d+1$, $D^\alpha L_m(x)$ 具有指数衰减. 仿引理 4, 我们有:

引理 5　(Bernstein 不等式)　设 $2m>k+d+1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则

$$|J_{m,h}(f)|_{k,p}\leqslant c_9h^{-k}\|J_{m,h}(f)\|_p.$$

引理 6　$K_r(f,2^{-N})_p\leqslant C\cdot 2^{-Nr}\left\{\sum_{j=0}^{N}[(2^{jr}\|f-J_{m,2^{-j}}(f)\|_p)^{\mu}]^{1/\mu}+\|f\|_p\right\},(\mu\leqslant 1)$.

证明　$K_r(f,2^{-N})_p\leqslant\|f-J_{m,2^{-N}}(f)\|_p+2^{-Nr}|J_{m,2^{-N}}(f)|_{r,p}\leqslant$

$$\|f-J_{m,2^{-N}}(f)\|_p+2^{-Nr}\Big[\sum_{j=1}^{N}|J_{m,2^{-j}}(f)-J_{m,2^{-(j-1)}}(f)|_{r,p}+|J_{m,1}(f)|_{r,p}\Big]\leqslant$$

$$\|f-J_{m,2^{-N}}(f)\|_p+2^{-Nr}\Big[\sum_{j=1}^{N}2^{jr}\|J_{m,2^{-j}}(f)-J_{m,2^{-(j-1)}}(f)\|_p+\dot{c}\|J_{m,1}(f)\|_p\Big]\leqslant$$

$$\|f-J_{m,2^{-N}}(f)\|_p+2\cdot 2^{-Nr}\Big[\sum_{j=0}^{N}2^{jr}\|f-J_{m,2^{-j}}(f)\|_p+\ddot{c}\|f\|_p\Big]\leqslant$$

$$2\cdot 2^{-Nr}\Big[\sum_{j=0}^{N}2^{jr}\|f-J_{m,2^{-j}}(f)\|_p+\ddot{c}\|f\|_p\Big]\leqslant$$

$$C\cdot 2^{-Nr}\left\{\sum_{j=0}^{N}[(2^{jr}\|f-J_{m,2^{-j}}(f)\|_p)^{\mu}]^{1/\mu}+\|f\|_p\right\}.$$

证毕.

定理 2　$f\in Lip(\gamma,L_p)\Leftrightarrow\|f-J_{m,2^{-j}}(f)\|_p=O(2^{-j\gamma})$.

证明　必要性由定理 1 的推论可得, 充分性利用引理 6 和简单计算可得. 证毕.

参考文献:

[1] 王林, 徐裕光. 广义 Lipschitz Φ-伪压缩映射不动点的 Mann 迭代逼近[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(增刊): 35-38.

[2] DEVOR R A, RIEMENSCHNEIDER S D, SHARPLEY R C. Weak interpolation in Banach spaces[J]. Journal of Functional Analysis, 1979, 33(1): 58-94.

[3] MADYCH W R, NELSON S A. Polyharmonic cardinal splines[J]. J Approximation Theory, 1990, 60(2): 141-156.

[4] JIA Rong-qing, LEI Jun-jiang. Approximation by μltiinteger translates of functions havingglobal support[J]. J Aproximation

Theory, 1993, 72(1): 2-23.

[5] LIU Yong-ping. Approximation of smooth functions by polyharmoniccardinal splines in $L_p(R^n)$ space[J]. Acta Math Appl Sinica, 1998, 14(2): 157-164.

[6] MADYCH W R. Polyharmonic splines, multiscale anlysis and entire functions[M]// WHAUSSMANN, JETTER K. Multivariate approximation interpolations eds. Basel: Birkhauser Verlag, 1990: 205-216.

Approximation of Lipschitz spaces from Cardinal splines

YANG Zhu-yuan[1], LIU Yong-ping[2]

(1. School of Mathermatics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming 650031, China;
2. School of Mathematics Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: A characterization of Lipschitz spaces by Cardinal splines is obtained, and meantime the Bernstein inequality of approximation operator and the estimate of K-functional by approximation order are obtained.

Key words: Lipshitz spaces; Cardinal splines; approximation

* *

(上接第 280 页)

Existence of solution to a class of nonlinear cantilever beam equations

YAO Qing-liu[1], LI Yong-xiang[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The existence of solution is considered for a class of nonlinear cantilever beam equations. In mechanics, the class of equations describes deformation of the elastic beam whose one end is fixed and the other is free. The character of this equation is that the nonlinear term contain third derivative of unknown function. By using of the decomposition of equation and the Leray-Schauder fixed point theorem, four existence theorems are established. The main results show that the class of equations has at least one solution or positive solution provided the "height" of nonlinear tem is appropriate on a bounded set.

Key words: nonlinear ordinary differential equation; two-point boundary value problem; solution and positive solution; existence; fixed point theorem