序约束下AR(2)模型参数的拟似然估计

齐 芯[1,2], 王德辉[2]
(1. 吉林大学 珠海学院, 广东 珠海 519041; 2. 吉林大学 数学研究所, 长春 130012)

摘要: 在约束条件下利用拟似然估计方法对AR(2)模型的参数进行统计推断, 研究了拟似然估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和约束拟似然估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*$ 的相合性及渐近正态性, 并给出了AR(2)模型参数序关系的假设检验方法及模拟结果.

关键词: 拟似然估计; 序约束; 假设检验
中图分类号: O212.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)03-0447-05

Quasi-likelihood Estimation of Parameters in AR(2) Model under Order Restriction

QI Xin[1,2], WANG De-hui[2]
(1. *College of Zhuhai*, *Jilin Universty*, *Zhuhai* 519041, *Guangdong Province*, *China*;
2. *Institute of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: We studied the parameter estimation for AR(2) model under simple order restriction via quasi-likelihood method. The strong consistency and asymptotic property of quasi-likelihood estimator $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ and the restriction quasi-likelihood estimator $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*$ were discussed. Furthermore, we considered the problem of testing homogeneity of parameters against the simple order restriction, and also gave a simulation.

Key words: quasi-likelihood estimation; order restriction; hypothesis testing

0 引 言

在大多数经济、金融时间序列模型中, 时间序列 t 时刻的波动都依赖于 t 时刻之前的数据. 文献[1-3]研究表明: 距离现在较远的历史数据对现在的影响不会超过较近历史数据对现在的影响, 因而要求系数满足一定约束的时间序列模型更符合实际. 文献[4]在正态假设下给出了序约束下ARCH(2)模型的估计与检验问题. 但研究结果表明, 正态性的假设和历史数据特征常不一致. 因此, 本文考虑在总体分布未知时用拟似然估计方法对AR(2)模型的参数在约束条件下进行统计推断.

设时间序列 x_t 满足平稳AR(2)模型:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声序列, 且满足

$$\begin{cases} E\varepsilon_t = 0, \quad E\varepsilon_t^2 = 1, \\ \varepsilon_t \text{ 与 } \{x_s, s < t\} \text{ 相互独立.} \end{cases} \tag{2}$$

易知其平稳域为 $\Theta_0 = \{ |\alpha_2| < 1,\ \alpha_2 \pm \alpha_1 < 1 \}$. 为方便, 记 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)'$, $\boldsymbol{Z}_t = (x_{t-1}, x_{t-2})'$, 则有

收稿日期: 2010-09-25.
作者简介: 齐 芯(1982—), 女, 汉族, 硕士研究生, 讲师, 从事时间序列分析的研究, E-mail: xinerqi@sina.com. 通讯作者: 王德辉(1969—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事数理统计的研究, E-mail: Wangdh@jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10971081)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070183023).

$$x_t = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{Z}_t + \varepsilon_t. \tag{3}$$

设 $X_{-1}, X_0, X_1, \cdots, X_n$ 为来自模型(3)的一段随机样本，记信息集 $\mathscr{F}_{t-1} = \sigma(X_s, s \leqslant t-1)$. 本文利用拟似然方法，在约束条件下对 AR(2)模型进行推断.

1 AR(2)模型参数的约束拟似然估计

下面用拟似然估计法给出在序约束条件下模型(3)的参数估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*$.

首先求解参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的拟似然估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)'$. 由文献[5]知，为求 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，令

$$\boldsymbol{G}_n^* = \sum_{t=1}^{n} \begin{pmatrix} -x_{t-1} \\ -x_{t-2} \end{pmatrix} (x_t - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{Z}_t) = 0,$$

其中 $\boldsymbol{G}_n^* \in \mathscr{G} = \left\{\boldsymbol{G}_n: \boldsymbol{G}_n = \sum_{t=1}^{n} a_t(\boldsymbol{\alpha}) h_t(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{t=1}^{n} a_t(\boldsymbol{\alpha})(x_t - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{Z}_t)\right\}$是 $\mathscr{G}$ 中的 O_F-最优估计函数，解得

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 = \dfrac{X^{(n-2)'}X^{(n-2)}X^{(n-1)'}X^{(n)} - X^{(n-2)'}X^{(n)}X^{(n-2)'}X^{(n-1)}}{X^{(n-2)'}X^{(n-2)}X^{(n-1)'}X^{(n-1)} - (X^{(n-2)'}X^{(n-1)})^2}, \\ \hat{\alpha}_2 = \dfrac{X^{(n-1)'}X^{(n-1)}X^{(n-2)'}X^{(n)} - X^{(n-1)'}X^{(n)}X^{(n-2)'}X^{(n-1)}}{X^{(n-2)'}X^{(n-2)}X^{(n-1)'}X^{(n-1)} - (X^{(n-2)'}X^{(n-1)})^2}, \end{cases}$$

其中 $X^{(n-s)} = (x_{1-s}, x_{2-s}, \cdots, x_{n-s})'$, $s = 0, 1, 2$.

其次求解参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 在约束($\alpha_1 \geqslant \alpha_2$)(即 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Theta}_1 = \{|\alpha_2| < 1, \alpha_2 \pm \alpha_1 < 1, \alpha_1 \geqslant \alpha_2\}$)时的拟似然估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = (\hat{\alpha}_1^*, \hat{\alpha}_2^*)'$.

在约束 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ 条件下，由 Lagrange 乘数法对

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}_n^*(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{F}\lambda = 0, \\ \boldsymbol{F}'\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

(其中 λ 由约束条件确定，$\boldsymbol{F} = (1, -1)'$)进行优化，有:

1) 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时，式(4)变为$\begin{cases} \boldsymbol{G}_n^*(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{F}\lambda = 0, \\ \boldsymbol{F}'\boldsymbol{\alpha} = 0, \end{cases}$ 其中 λ 可以任意取值，解此方程组得

$$\hat{\alpha}_1^* = \hat{\alpha}_2^* = \hat{\alpha}_0 = \frac{X^{(n-1)'}X^{(n)} + X^{(n-2)'}X^{(n)}}{X^{(n-1)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)} + 2(X^{(n-2)'}X^{(n-1)})};$$

2) 当 $\alpha_1 > \alpha_2$ 时，式(4)变为$\begin{cases} \boldsymbol{G}_n^*(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{F}\lambda = 0, \\ \boldsymbol{F}'\boldsymbol{\alpha} > 0, \end{cases}$ 其中 $\lambda = 0$. 由 $\boldsymbol{G}_n^*(\boldsymbol{\alpha}) = 0$，知$\begin{cases} \alpha_1 = \hat{\alpha}_1, \\ \alpha_2 = \hat{\alpha}_2. \end{cases}$ 此时 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*$ 的取值需要分如下两种情况讨论(如图 1 如示):

(i) 若 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \in S_1$，则有$\begin{cases} \hat{\alpha}_1^* = \hat{\alpha}_1, \\ \hat{\alpha}_2^* = \hat{\alpha}_2; \end{cases}$

(ii) 若 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \in S_2$，则由文献[5]中的投影估计法知

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_V)'\hat{\boldsymbol{\alpha}},$$

其中: $\boldsymbol{V}$ 为任意的正定对称矩阵,

$$\boldsymbol{P}_V = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{F})^- \boldsymbol{F}'\boldsymbol{V}^{-1}$$

是投影矩阵; $\boldsymbol{I}$ 为单位阵; $\boldsymbol{A}^-$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆. 定义

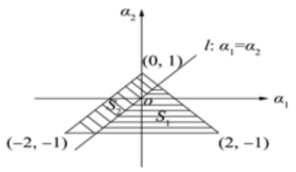

图 1 当 $\alpha_1 > \alpha_2$ 时 $\hat{\alpha}^*$ 的取值情况

Fig. 1 Situation of $\hat{\alpha}^*$ when $\alpha_1 > \alpha_2$

$$\boldsymbol{V}_0 = \mathscr{E}(\boldsymbol{G}_n^*) = (E\dot{\boldsymbol{G}}_n^*)'(E\boldsymbol{G}_n^*\boldsymbol{G}_n^{*\prime})^{-1}(E\dot{\boldsymbol{G}}_n^*) = \begin{pmatrix} X^{(n-1)'}X^{(n-1)} & X^{(n-2)'}X^{(n-1)} \\ X^{(n-2)'}X^{(n-1)} & X^{(n-2)'}X^{(n-2)} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{P}_0$ 为 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0$ 时的投影阵，则

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{F})^{-}\boldsymbol{F}'\boldsymbol{V}_0^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{X^{(n-2)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)}}{X^{(n-1)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)} + 2(X^{(n-2)'}X^{(n-1)})} & -\dfrac{X^{(n-2)'}X^{(n-1)} + X^{(n-1)'}X^{(n-1)}}{X^{(n-1)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)} + 2(X^{(n-2)'}X^{(n-1)})} \\ -\dfrac{X^{(n-2)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)}}{X^{(n-1)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)} + 2(X^{(n-2)'}X^{(n-1)})} & \dfrac{X^{(n-2)'}X^{(n-1)} + X^{(n-1)'}X^{(n-1)}}{X^{(n-1)'}X^{(n-1)} + X^{(n-2)'}X^{(n-2)} + 2(X^{(n-2)'}X^{(n-1)})} \end{pmatrix}.$$

所以，有

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_0)'\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_0 \end{pmatrix}.$$

综上所述，记 $C=\{\alpha_1 \geqslant \alpha_2\}$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^0 = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0)'$，则约束下的拟似然估计为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = \hat{\boldsymbol{\alpha}} I_{(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \in C)} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}^0 I_{(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \notin C)}$.

2　AR(2)模型参数拟似然估计的性质

记 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 为模型(3)中参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的真值.

定理 1　设时间序列 $\{x_t\}$ 服从模型(3)，$Ex_t^4 < +\infty$，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \Theta_0$，则有：

1) $P\{\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\} = 1$；

2) $P\{\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\} = 1$；

3) $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \xrightarrow{d} N(0, \boldsymbol{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}))$，$n \to +\infty$；其中 $\boldsymbol{I}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ 是 Fisher 信息阵，为正定阵，即

$$\boldsymbol{I}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = E\left\{\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\alpha})'}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} > 0,$$

这里 $l_t(\boldsymbol{\alpha}) = -\dfrac{(x_t - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{Z}_t)^2}{2}$；

4) $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \xrightarrow{d} N(0, \boldsymbol{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}))$，$n \to +\infty$.

1)和 2)的证明方法与文献[4]中定理 3.1 类似，因此略. 3)和 4)的证明方法相同，因此下面只给出 3)的证明过程.

引理 1　设时间序列 $\{x_t\}$ 满足模型(3)，$Ex_t^4 < +\infty$，$\boldsymbol{\alpha} \in \Theta_0$，则当 $n \to +\infty$ 时，有：

(i) $\sup\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in\Theta_0}\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\dfrac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'} - E\dfrac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\right| \to 0$ a. s.，$1 \leqslant i, j \leqslant 2$；

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} \to E\left[-\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\right]\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} = \boldsymbol{C}_1;$$

(ii) $\boldsymbol{C}_1$ 为正定阵.

证明可参见文献[6].

引理 2　设时间序列 $\{x_t\}$ 满足模型(3)，$Ex_t^4 < +\infty$，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \Theta_0$，则

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial l_t(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow{d} N(0, \boldsymbol{I}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})).$$

证明可参见文献[7].

下面证明定理 1 中的(3). 将 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{t=1}^{n}\dfrac{\partial l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}$ 在 $\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 处进行 Taylor 展开，并令 $\boldsymbol{\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}$，整理得

$$\left[-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\right]_{\boldsymbol{\alpha}=\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})} \cdot \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial l_t(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}, \tag{5}$$

其中 $\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ 为介于 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 之间的数.

由引理 1 知，当 $n \to +\infty$ 时，

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})} - E\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0.$$

由定理1，当 $n\to+\infty$ 时，$\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\xrightarrow{\text{a.s.}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$. 此外，由函数$\dfrac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}$关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是连续的，有

$$E\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})}\xrightarrow{\text{a.s.}}E\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}},$$

于是，有

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\xi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})}\xrightarrow{\text{a.s.}}-E\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}=\boldsymbol{C}_1.$$

由引理2以及 Slutsky[8]定理，又因 $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{I}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$，有 $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\tilde{\boldsymbol{\alpha}})\xrightarrow{d}N(0,\boldsymbol{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}))$.

3 假设检验

下面利用约束下参数的拟似然估计对参数的序关系给出检验方法.

对于模型(3)，参数 $\boldsymbol{\alpha}\in\Theta_0$，考虑如下检验问题：

$$H_0:\ \alpha_1=\alpha_2\ \text{v.s.}\ H_1-H_0,\tag{6}$$

其中 $H_1:\ \alpha_1\geqslant\alpha_2$.

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*=(\hat{\alpha}_1^*,\hat{\alpha}_2^*)'$是参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 在限制集合 C 上的拟似然估计，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{H_0}=(\hat{\alpha}_{H_01},\hat{\alpha}_{H_02})'$是参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 当 H_0 成立时的拟似然估计，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{H_0}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}^0$. 从而 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*=\hat{\boldsymbol{\alpha}}I_{(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\in C)}+\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{H_0}I_{(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\notin C)}$. 于是，对检验问题(6)的拟似然比统计量为

$$\varLambda=\frac{\max\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in H_0}\boldsymbol{G}_n^*(x_1,x_2,\cdots,x_n;\boldsymbol{\alpha}\mid\mathscr{F}_0)}{\max\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in H_1}\boldsymbol{G}_n^*(x_1,x_2,\cdots,x_n;\boldsymbol{\alpha}\mid\mathscr{F}_0)},$$

其拟似然函数的对数拟似然比统计量为

$$\ln\varLambda=\sum_{t=1}^{n}[l_t(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{H_0})-l_t(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*)].$$

定理2 在 H_0 下，令 $T=-2\ln\varLambda$，则对于 $\forall t>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P(T\geqslant t)=\dfrac{1}{2}P(\chi_1^2\geqslant t)$.

定理2的结论虽然与文献[4]中定理4.2相同，但只有当模型(3)中误差序列$\{\varepsilon_t\}$的分布已知时才能使用文献[4]中极大似然估计的似然比统计量进行假设检验. 而本文给出的拟似然估计似然比统计量可在误差序列$\{\varepsilon_t\}$的分布未知时进行假设检验. 因此，定理2是文献[4]中定理4.2的推广.

表1和表2列出了检验问题(6)的随机模拟结果. 其中，样本容量 $n=700$，初始值 $x_{-1}=x_0=0.0$，$\varepsilon_t\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(0,1)$. 显著性水平分别取5%和10%. Δ 满足 $\alpha_1-\alpha_2=\sqrt{2}\Delta$，即 Δ 表示直线 $\alpha_1-\alpha_2=0$ 与 $\alpha_1-\alpha_2=\sqrt{2}\Delta$的距离. 表1和表2中的模拟结果是模拟10次的平均值.

表1 当 $x_{-1}=x_0=0.0$，检验水平为0.05时检验问题(6)拟似然比检验统计量功效的模拟结果

Tabel 1 Power simulated results of quasi-likelihood ratio test statistics with a test level 0.05 under test problem (6) when $x_{-1}=x_0=0.0$

α_2	$\Delta=0$	$\Delta=0.0101$	$\Delta=0.0202$	$\Delta=0.0303$	$\Delta=0.0404$	$\Delta=0.0505$	$\Delta=0.0606$
−0.99	0.053	0.973	1	1	1	1	1
−0.90	0.050	0.459	0.835	0.975	1	1	1
−0.70	0.050	0.318	0.535	0.751	0.915	0.976	0.996
−0.50	0.049	0.277	0.444	0.627	0.798	0.904	0.966
−0.30	0.050	0.256	0.389	0.525	0.704	0.851	0.930
−0.10	0.053	0.234	0.382	0.523	0.664	0.806	0.899
0	0.053	0.236	0.340	0.510	0.675	0.794	0.918
0.10	0.051	0.258	0.351	0.531	0.701	0.833	0.924
0.30	0.051	0.270	0.429	0.600	0.767	0.917	0.966
0.40	0.050	0.300	0.506	0.778	0.910	0.977	0.993
0.49	0.052	0.772					

表 2　当 $x_{-1}=x_0=0.0$, 检验水平为 0.1 时检验问题(6)拟似然比检验统计量功效的模拟结果

Tabel 2　Power simulated results of quasi-likelihood ratiotest statistics with a test level 0.1 under test problem (6) when $x_{-1}=x_0=0.0$

α_2	$\Delta=0$	$\Delta=0.0101$	$\Delta=0.0202$	$\Delta=0.0303$	$\Delta=0.0404$	$\Delta=0.0505$	$\Delta=0.0606$
-0.99	0.106	0.986	1	1	1	1	1
-0.90	0.105	0.635	0.923	0.991	0.998	1	1
-0.70	0.102	0.472	0.696	0.859	0.955	0.993	1
-0.50	0.101	0.443	0.604	0.785	0.884	0.952	0.990
-0.30	0.105	0.412	0.566	0.677	0.824	0.913	0.974
-0.10	0.104	0.398	0.532	0.668	0.802	0.903	0.961
0	0.105	0.393	0.522	0.667	0.795	0.899	0.965
0.10	0.103	0.427	0.528	0.690	0.813	0.916	0.969
0.30	0.105	0.433	0.590	0.753	0.876	0.954	0.987
0.40	0.104	0.449	0.654	0.868	0.959	0.988	0.999
0.49	0.106	0.836					

由表 1 和表 2 可见: 对于每个固定的 α_2, 随着 Δ 的增大检验功效值也逐渐提高; 对于每个固定的 Δ, 当 α_2 由负值增大到 0 时, 除 0.234 外检验功效反而下降; 当 α_2 由正值减小到 0 时, 检验功效值下降.

参　考　文　献

[1] 安鸿志. 时间序列分析 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1992.

[2] Kantz H, Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis [M]. 2nd ed. London: Cambridge University Press, 2004.

[3] HONG Yong-miao. One-Sided Testing for Conditional Heteroskedasticity in Time Series Models [J]. J Time Ser Anal, 1997, 18(3): 253-277.

[4] WANG De-hui, SONG Li-xin, SHI Ning-zhong. Estimation and Test of ARCH(0,2) Model under Order Restriction [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statiistics, 2002, 18(3): 244-254. (王德辉, 宋立新, 史宁中. 序约束下 ARCH(0,2)模型参数估计与检验 [J]. 应用概率统计, 2002, 18(3): 244-254.)

[5] Heyde C C. Quasi-likelihood and Its Application [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[6] QI Xin. Quasi-likelihood Estimation of AR(2) Model under Ordered Restriction [D]: [Master's Degree Thesis]. Changchun: Institute of Mathematics, Jilin University, 2007. (齐芯. 序约束下 AR(2)模型的拟似然估计 [D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学数学研究所, 2007.)

[7] HUANG Xiao-wei. On the Research of Parameter Estimation for a Class of β-ARCH Model [D]: [Ph D Thesis]. Changchun: Jilin University, 2004. (黄晓薇. 关于一类 β-ARCH 模型参数估计的研究 [D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2004.)

[8] Casella G, Berger R L. Statistical Inference [M]. Beijing: China Machine Press, 2006.