不确定多时滞广义系统的非脆弱 H_∞ 保性能控制

张金花, 邢　伟
(东北大学 理学院系统科学研究所, 沈阳 110004)

摘要: 针对一类具有范数有界不确定性和多状态滞后的广义系统, 基于线性矩阵不等式方法, 研究状态矩阵、状态时滞矩阵和控制器都存在摄动时的非脆弱 H_∞ 保性能控制问题, 得到了广义闭环系统渐近稳定且具有 H_∞ 范数界 γ 的时滞相关充分条件, 给出了无记忆非脆弱 H_∞ 保性能控制器的设计方法, 并用数值例子表明了该方法的有效性.

关键词: 时滞广义系统; H_∞ 控制; 非脆弱控制; 保性能控制; 线性矩阵不等式
中图分类号: O231.1　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2011)03-0452-07

Non-fragile H_∞ Guaranteed Cost Control for Uncertain Generalized Systems with Multiple Time-Delay

ZHANG Jin-hua, XING Wei
(*Institute of Systems Science*, *College of Sciences*, *Northeastern University*, *Shenyang* 110004, *China*)

Abstract: Based on linear matrix inequality, the problem of non-fragile H_∞ guaranteed cost for uncertain generalized systems with multiple time-delays was discussed, which stated matrix, state delay matrix and the controller gained both exist uncertainties. Firstly, a delay-dependent sufficient condition was obtained, which ensures that the closed-loop system is asymptotic stable, with H_∞ norm bound. Then a design method for non-fragile H_∞ guaranteed cost controller of the system was presented. In the end, a numerical example was given to illustrate the effectiveness of the design method.

Key words: time-delay generalized system; H_∞ control; non-fragile control; guaranteed cost control; linear matrix inequality

0　引　言

任何实际系统的过去状态都不可避免地要对当前状态产生影响, 这类系统称为时滞系统. 实际控制系统中产生的不确定性和时滞将导致系统的不稳定性或性能指标下降, 文献[1]研究了不确定时滞系统. 保性能就是对具有不确定参数形式的系统设计一个控制律, 不仅要保证闭环系统稳定, 还要使得闭环系统的性能指标不超过某个确定的上界. 文献[2]针对一类变时滞系统, 研究了其非脆弱保性能控制, 分别对控制器增益具有加法式摄动和乘法式摄动两种情况进行了讨论; 文献[3]讨论了非线性广义系统控制器的鲁棒与可靠控制问题; 文献[4]针对一类时滞广义系统, 其状态矩阵、状态时滞

收稿日期: 2010-06-08.
作者简介: 张金花(1984—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事时滞系统保性能控制的研究, E-mail: zhangjinhua04405@163.com. 通讯作者: 邢　伟(1961—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事控制理论与应用及系统科学的研究, E-mail: awxing@mail.neu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 60974004).

矩阵和输入矩阵均具有线性分式形式的参数不确定性, 给出了系统时滞无关保性能控制的严格矩阵不等式; 文献[5]讨论了状态反馈控制器具有加法式摄动, 设计的控制保证系统渐近稳定且满足最优的 $\boldsymbol{H}_\infty$ 范数界; 文献[6]针对一类具有范数有界不确定性的连续时滞广义系统, 采用线性矩阵不等式(LMI)方法研究了具有鲁棒 $\boldsymbol{H}_\infty$ 性能的保性能控制问题. 本文基于 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 方法, 研究不确定多时滞广义系统的非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制问题, 当控制器增益具有加法式摄动时, 所设计的控制器既能使闭环系统稳定, 又能保证系统具有一定的性能指标.

1　问题的描述及引理

考虑如下不确定多时滞广义系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_0 + \Delta \boldsymbol{A}_0(t))\boldsymbol{x}(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}(\boldsymbol{A}_i + \Delta \boldsymbol{A}_i(t))\boldsymbol{x}(t - d_i(t)) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) = (\boldsymbol{C} + \Delta \boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad t \in [-d^*, 0], \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态; $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入; $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2^p[0, \infty)$ 为干扰输入; $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^q$ 为被控输出; $\boldsymbol{\phi}(t)$ 是初始条件; $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}_i (i=0,1,\cdots,k), \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是已知的适当维数矩阵; $d_i(t)\,(i=1,2,\cdots,k)$ 表示时变时滞, 且满足 $0 \leqslant d_i(t) \leqslant \bar{d}_i$, $\dot{d}_i(t) \leqslant \eta_i < 1$, $d^* = \max\{\bar{d}_i, i=1,2,\cdots,k\}$, $d_1(0) = a$, $d_2(0) = b$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{E} = r < n$, $\Delta \boldsymbol{A}_i (i=0,1,\cdots,k)$, $\Delta \boldsymbol{C}$ 是不确定矩阵, 满足:

$$\Delta \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_i (i = 0,1,\cdots,k), \qquad \Delta \boldsymbol{C} = \bar{\boldsymbol{H}}\bar{\boldsymbol{F}}(t)\bar{\boldsymbol{E}}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{E}_i, \bar{\boldsymbol{H}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 是已知的常矩阵, $\boldsymbol{F}_i, \bar{\boldsymbol{F}}$ 是 Lebesgue 可测且有界的矩阵, 且 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i \leqslant \boldsymbol{I}$, $\bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}} \leqslant \boldsymbol{I}$ 成立.

系统(1)的性能指标取为

$$J = \int_0^\infty [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t, \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{R}_1 > 0$, $\boldsymbol{R}_2 > 0$ 是给定的对称正定加权矩阵.

本文要设计多时滞广义系统(1)的非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制器:

$$\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t), \tag{4}$$

式中: $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $\Delta \boldsymbol{K}$ 表示增益的摄动:

$$\Delta \boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}_a\boldsymbol{F}_a(t)\boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a \leqslant \boldsymbol{I}, \tag{5}$$

$\boldsymbol{H}_a, \boldsymbol{G}_1$ 是适当维数的常矩阵, $\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}$ 是 Lebesgue 可测的扰动矩阵.

系统(1)和控制器(4)构成的闭环系统如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t) + \sum\limits_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{x}(t - d_i(t)) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\omega}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad t \in [-d^*, 0], \end{cases} \tag{6}$$

其中: $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_0 + \Delta \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})$; $\bar{\boldsymbol{A}}_i = \boldsymbol{A}_i + \Delta \boldsymbol{A}_i$; $\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{C} + \Delta \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{K})$. 若系统(6)满足如下性质:

1) 当外部干扰为零时(即 $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ 时), 闭环系统是鲁棒渐近稳定的;

2) 当系统为零初值时, 有 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2 \leqslant \gamma \|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2$, 这里 $\gamma > 0$ 为给定的 $\boldsymbol{H}_\infty$ 性能;

3) 闭环性能指标值 J 存在上确界 J^*, 其中 J^* 是确定的常数.

则称系统(6)是非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制系统, 式(4)为系统(6)的非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制器.

引理 1(**Schur 补引理**)[1]　对给定的对称矩阵 $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12} \\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{S}_{11}$ 是 $r \times r$ 维矩阵, 则下列3 个条件等价:

1) $\boldsymbol{S} < 0$;

2) $S_{11}<0$, $S_{22}-S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12}<0$;

3) $S_{22}<0$, $S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}}<0$.

引理2[7]　给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{Y}$ 是对称的, 则对所有的 $\boldsymbol{F}(t)$: $\boldsymbol{F}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}<0$ 成立的充分必要条件是: 存在标量 $\varepsilon>0$, 使得 $\boldsymbol{Y}+\varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0$.

引理3[8]　假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ 为适当维数的实矩阵, 且 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$, 对任意的对称矩阵 $\boldsymbol{P}>0$ 及标量 $\varepsilon>0$, 如果有 $\boldsymbol{P}-\varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}>0$, 则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E})\leqslant\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}-\varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}.$$

2　非脆弱 H_∞ 保性能控制器的设计

定理1　给定常数 $\gamma>0$, 对于不确定性广义闭环系统(6)和不确定性矩阵(2),(5), 以及性能指标(3), 如果存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$、正定对称 $\boldsymbol{Q}_i(i=1,2,\cdots,k)$, 使得如下LMI成立:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0,\tag{7}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_k+\boldsymbol{R}_1+(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{S} & 0\\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{pmatrix}<0,\tag{8}$$

其中:

$$\boldsymbol{\Xi}=(\boldsymbol{A}_0+\Delta\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}+\boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_0+\Delta\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}+\boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K})+\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{Q}_i;$$

$$\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1+\Delta\boldsymbol{A}_1)\quad\cdots\quad\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_k+\Delta\boldsymbol{A}_k));$$

$$\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}((1-\eta_1)\boldsymbol{Q}_1,\cdots,(1-\eta_k)\boldsymbol{Q}_k).$$

则 $\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(6)的一个非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制器, 且性能指标(3)存在上确界:

$$J^*=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}(0)+\sum_{i=1}^{k}\int_{-d_i(0)}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{\phi}(s)\,\mathrm{d}s+\gamma^2\rho^2,\qquad\rho=\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2.$$

证明: 首先证明在无干扰作用下闭环系统(6)渐近稳定.

选取广义Lyapunov函数:

$$V(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-d_i(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s.$$

$V(\boldsymbol{x},t)$ 沿闭环系统(6)的解轨迹时间导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t)-\\&\sum_{i=1}^{k}(1-\dot{d}_i(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t-d_i(t))=\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}_0+\Delta\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}+\boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_0+\Delta\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}+\boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)+\\&\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t)-\sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t-d_i(t))+\\&\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}(t-d_i(t))=\\&(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_1(t))\quad\cdots\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_k(t)))\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Xi}&\boldsymbol{\Psi}\\\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}&-\boldsymbol{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{x}(t-d_1(t))\\\vdots\\\boldsymbol{x}(t-d_k(t))\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由矩阵不等式(8)及Schur补引理可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Xi}&\boldsymbol{\Psi}\\\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}&-\boldsymbol{S}\end{pmatrix}<0,$$

从而 $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)<0$，根据 Lyapunov 稳定性理论，当不存在扰动时，闭环系统(6)是渐近稳定的.

其次证明闭环系统(6)满足 $\boldsymbol{H}_\infty$ 性能及性能指标.

在零初始条件下，对给定的常数 $\gamma>0$，引入如下性能指标：

$$W=\int_0^\infty[z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{\omega}(t)]\mathrm{d}t,\tag{9}$$

$$\begin{aligned}W=&\int_0^\infty[z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{\omega}(t)+\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)]\mathrm{d}t-\boldsymbol{V}(\infty)\leqslant\\&\int_0^\infty[z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{\omega}(t)+\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)]\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{\xi}(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中：

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)=(\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d_1(t))\quad\cdots\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d_k(t))\quad\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t));$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{C}_k^{\mathrm T}\boldsymbol{C}_k & \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm T} & -\boldsymbol{S} & 0\\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{pmatrix}.$$

由 Schur 补引理可知，矩阵不等式(8)成立等价于 $\boldsymbol{H}<0$，从而可得

$$\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2.$$

由式(9)和 Schur 补引理有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}t\leqslant&\int_0^\infty[-\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)(\boldsymbol{R}_1+(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}))\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t+\\&\int_0^\infty[-z^{\mathrm T}(t)z(t)+\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{\omega}(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

考虑初始条件可得

$$\begin{aligned}J=&\int_0^\infty[-\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)(\boldsymbol{R}_1+(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}))\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t<\boldsymbol{V}(0)-\boldsymbol{V}(\infty)+\gamma^2\rho^2<\\&\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}(0)+\sum_{i=1}^k\int_{-d_i(0)}^0\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s+\gamma^2\rho^2=J^*.\end{aligned}$$

证毕.

定理 1 给出了系统(1)非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制器存在的充分条件，但不等式中含有不确定项，不能用 Matlab 中 LMI 工具箱求解，故要把式(8)变为与其等价的线性矩阵不等式.

定理 2　对系统(1)和具有加法式摄动的控制器式(5)，给定标量 $\gamma>0$，如果存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{X}$，对称正定矩阵 $\boldsymbol{V}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 和矩阵 $\boldsymbol{Y}$，标量 $\varepsilon_0>0$，$\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_a>0$，使得如下 LMI 成立：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}\geqslant0,\tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{T}_2 & \boldsymbol{T}_3 & 0 & \boldsymbol{X}^{\mathrm T}\\ * & -\boldsymbol{S}_1 & 0 & 0 & \boldsymbol{T}_4 & 0\\ * & 0 & -\boldsymbol{S}_2 & 0 & 0 & 0\\ * & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}_3 & 0 & 0\\ 0 & * & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}_4 & 0\\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{R}_1^{-1}\end{pmatrix}<0,\tag{11}$$

其中：

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y})^{\mathrm T}+\varepsilon_0\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{H}_0^{\mathrm T}+\varepsilon_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{H}_a\boldsymbol{H}_a^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm T}+\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^k(1-\eta_i)^{-1}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm T};$$

$$\boldsymbol{T}_1=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{V}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{V}_k);$$

$$\boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_0^{\mathrm T}\quad\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm T}\quad\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm T}\quad\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm T}\quad(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y})^{\mathrm T}\quad\boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\quad\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm T});$$

$$\boldsymbol{T}_3=(\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\quad\cdots\quad\boldsymbol{X}^{\mathrm T});$$

$$T_4 = \mathrm{diag}(V_1E_1^{\mathrm{T}}, \cdots, V_kE_k^{\mathrm{T}});$$

$$S_1 = \mathrm{diag}((1-\eta_1)V_1, (1-\eta_2)V_2, \cdots, (1-\eta_k)V_k);$$

$$S_2 = \mathrm{diag}(\varepsilon_0 I, \varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I, \varepsilon_2 I, I - \varepsilon_2(\overline{H}\overline{H}^{\mathrm{T}} + DH_aH_a^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}), R_2^{-1} - \varepsilon_aH_aH_a^{\mathrm{T}}, \varepsilon_a I);$$

$$S_3 = \mathrm{diag}(V_1, V_2, \cdots, V_k);$$

$$S_4 = \mathrm{diag}((1-\eta_1)^{-1}I, \cdots, (1-\eta_k)^{-1}I).$$

则闭环系统(6)是鲁棒渐近稳定的, 且有 $\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma \|\omega(t)\|_2$, 当线性矩阵(11)有解时,

$$u(t) = (K + \Delta K)x(t),$$

其中 $K = YX^{-1}$ 是系统(6)的一个非脆弱 H_∞ 保性能控制器, 相应的性能指标为

$$J \leqslant \phi^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}X^{-1}\phi(0) + \sum_{i=1}^{k}\int_{-d_i(0)}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(s)V_i^{-1}\phi(s)\mathrm{d}s + \gamma^2\rho^2 = J^*.$$

证明: 由 Schur 补引理, 式(8)等价于

$$\Xi + C_k^{\mathrm{T}}C_k + R_1 + (K+\Delta K)^{\mathrm{T}}R_2(K+\Delta K) + \Psi S^{-1}\Psi^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P < 0, \tag{12}$$

其中 Ξ, Ψ, S 如定理1所示.

将不确定项式(2),(5)代入

$$\Xi = (A_0 + B_2K)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(A_0 + B_2K) + \sum_{i=1}^{k}Q_i + (H_0F_0(t)E_0 + B_2H_aF_a(t)G_1)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(H_0F_0(t)E_0 + B_2H_aF_a(t)G_1),$$

由引理2知

$$(H_0F_0(t)E_0 + B_2H_aF_a(t)G_1)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(H_0F_0(t)E_0 + B_2H_aF_a(t)G_1) \leqslant \varepsilon_0P^{\mathrm{T}}H_0H_0^{\mathrm{T}}P + \varepsilon_0^{-1}E_0^{\mathrm{T}}E_0 + \varepsilon_1P^{\mathrm{T}}B_2H_aH_a^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}P + \varepsilon_1^{-1}G_1^{\mathrm{T}}G_1;$$

由引理3知,

$$P^{\mathrm{T}}(A_i + \Delta A_i)Q_i^{-1}(A_i + \Delta A_i)^{\mathrm{T}}P \leqslant P^{\mathrm{T}}A_i(Q_i - E_i^{\mathrm{T}}E_i)^{-1}A_i^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}H_iH_i^{\mathrm{T}}P,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)^{-1}P^{\mathrm{T}}(A_i + \Delta A_i)Q_i^{-1}(A_i + \Delta A_i)^{\mathrm{T}}P \leqslant \sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)^{-1}P^{\mathrm{T}}A_i(Q_i - E_i^{\mathrm{T}}E_i)^{-1}A_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)^{-1}P^{\mathrm{T}}H_iH_i^{\mathrm{T}}P,$$

$$C_k^{\mathrm{T}}C_k = (C + DK + \overline{H}\overline{F}\overline{E} + DH_aF_aG_1)^{\mathrm{T}}(C + DK + \overline{H}\overline{F}\overline{E} + DH_aF_aG_1) = (C + DK + \widetilde{H}\widetilde{F}\widetilde{E})^{\mathrm{T}}(C + DK + \widetilde{H}\widetilde{F}\widetilde{E}),$$

其中:

$$\widetilde{H} = (\overline{H} \quad DH_a); \quad \widetilde{F} = \mathrm{diag}(\overline{F}, F_a); \quad \widetilde{E}^{\mathrm{T}} = (\overline{E}^{\mathrm{T}} \quad G_1^{\mathrm{T}}).$$

由 $\overline{F}^{\mathrm{T}}\overline{F} \leqslant I$, $\overline{F}_a^{\mathrm{T}}\overline{F}_a \leqslant I$, 易得 $\widetilde{F}^{\mathrm{T}}\widetilde{F} \leqslant I$ 成立.

又由引理3知

$$C_k^{\mathrm{T}}C_k \leqslant (C + DK)^{\mathrm{T}}(I - \varepsilon_2\widetilde{H}\widetilde{H}^{\mathrm{T}})^{-1}(C + DK) + \varepsilon_2^{-1}\widetilde{E}^{\mathrm{T}}\widetilde{E} = (C + DK)^{\mathrm{T}}(I - \varepsilon_2(\overline{H}\overline{H}^{\mathrm{T}} + DH_aH_a^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}))^{-1}(C + DK) + \varepsilon_2^{-1}(\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E} + G_1^{\mathrm{T}}G_1),$$

$$(K + \Delta K)^{\mathrm{T}}R_2(K + \Delta K) = (K + H_aF_aG_1)^{\mathrm{T}}R_2(K + H_aF_aG_1) \leqslant K^{\mathrm{T}}(R_2^{-1} - \varepsilon_aH_aH_a^{\mathrm{T}})^{-1}K + \varepsilon_a^{-1}G_1^{\mathrm{T}}G_1.$$

由上面不等式的放缩及式(12)可得

$$(A_0 + B_2K)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(A_0 + B_2K) + \sum_{i=1}^{k}Q_i + R_1 + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}P + \varepsilon_0P^{\mathrm{T}}H_0H_0^{\mathrm{T}}P + \varepsilon_1P^{\mathrm{T}}B_2H_aH_a^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)^{-1}P^{\mathrm{T}}H_iH_i^{\mathrm{T}}P + \varepsilon_0^{-1}E_0^{\mathrm{T}}E_0 + \varepsilon_1^{-1}G_1^{\mathrm{T}}G_1 +$$

$$\sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{Q}_i-\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i)^{-1}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\varepsilon_2^{-1}(\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1)+$$
$$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\varepsilon_2(\bar{\boldsymbol{H}}\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{DH}_a\boldsymbol{H}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}))^{-1}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK})+$$
$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_2^{-1}-\varepsilon_a\boldsymbol{H}_a\boldsymbol{H}_a^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{K}+\varepsilon_a^{-1}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1<0. \tag{13}$$

令

$$\boldsymbol{\Pi}=(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})+\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{Q}_i+\boldsymbol{R}_1+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\varepsilon_0\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+$$
$$\varepsilon_1\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{H}_a\boldsymbol{H}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\sum_{i=1}^{k}(1-\eta_i)^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}.$$

再次运用矩阵 Schur 补引理，可知式(13)等价于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2\\ * & -\boldsymbol{N}_1 & 0\\ * & 0 & -\boldsymbol{N}_2\end{pmatrix}<0, \tag{14}$$

其中：

$$\boldsymbol{M}_1=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k);$$
$$\boldsymbol{M}_2=(\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\quad\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DK})^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}});$$
$$\boldsymbol{N}_1=\mathrm{diag}((1-\eta_1)(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1),\cdots,(1-\eta_k)(\boldsymbol{Q}_k-\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_k));$$
$$\boldsymbol{N}_2=\mathrm{diag}(\varepsilon_0\boldsymbol{I},\varepsilon_1\boldsymbol{I},\varepsilon_2\boldsymbol{I},\varepsilon_2\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}-\varepsilon_2(\bar{\boldsymbol{H}}\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{DH}_a\boldsymbol{H}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}),\boldsymbol{R}_2^{-1}-\varepsilon_a\boldsymbol{H}_a\boldsymbol{H}_a^{\mathrm{T}},\varepsilon_a\boldsymbol{I}).$$

令 $\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{I},\cdots,\boldsymbol{I})$，对式(14)进行合同变换，左乘 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，右乘 $\boldsymbol{T}$，再对不等式(7)两边分别左乘和右乘 $\boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}},\boldsymbol{P}^{-1}$，则得不等式(10)．记 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{KP}^{-1}$，$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{Q}_i^{-1}(i=1,2,\cdots,k)$，经计算、整理，并由矩阵 Schur 补引理知，式(14)等价于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi} & \bar{\boldsymbol{T}}_1 & \boldsymbol{T}_2 & \boldsymbol{T}_3 & 0 & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\ * & -\bar{\boldsymbol{S}}_1 & 0 & 0 & \boldsymbol{T}_4 & 0\\ * & 0 & -\boldsymbol{S}_2 & 0 & 0 & 0\\ * & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}_3 & 0 & 0\\ 0 & * & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}_4 & 0\\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{R}_1^{-1}\end{pmatrix}<0, \tag{15}$$

其中：$\bar{\boldsymbol{T}}_1=(\boldsymbol{A}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{A}_k)$；$\bar{\boldsymbol{S}}_1=\mathrm{diag}((1-\eta_1)\boldsymbol{Q}_1,\cdots,(1-\eta_k)\boldsymbol{Q}_k)$．

令 $\bar{\boldsymbol{T}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{I},\tilde{\boldsymbol{Q}},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I})$，$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}_1^{-1},\cdots,\boldsymbol{Q}_k^{-1})$，对矩阵不等式(15)左右都乘以 $\bar{\boldsymbol{T}}$，则线性矩阵不等式等价于(11)．相应的性能指标为

$$J\leqslant\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{\phi}(0)+\sum_{i=1}^{k}\int_{-d_i(0)}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{V}_i^{-1}\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s+\gamma^2\rho^2=J^*.$$

证毕．

3 仿真算例

对系统(1)设定参数如下：

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}-5 & -7\\ 3 & -6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0.8 & 1.2\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1.4\\ 0.7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_0=\begin{pmatrix}1.5\\ 0.9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}0.7\\ 0.8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}0.5\\ 0.4\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{C}=(1.2\quad 0.3),\quad D=0.2,\quad \bar{\boldsymbol{H}}=(0.1\quad 0.9),$$
$$\boldsymbol{E}_0=(0.3\quad 0.4),\quad \boldsymbol{E}_1=(0.1\quad 0.2),\quad \boldsymbol{E}_2=(0.2\quad 0.3),$$

$$\eta_1 = 0.1,\quad \eta_2 = 0.2,\quad F_0 = F_1 = F_2 = \bar{F} = 0.2\sin t,$$

$$\boldsymbol{H}_a = (0.3\quad 0.5),\quad \boldsymbol{G}_1 = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix},\quad F_a = 0.2\sin t,\quad \gamma = 0.9,\quad \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix},\quad \rho = 1,\quad a = 0.4,\quad b = 0.3,$$

假设 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 是单位平方可积的扰动.

由定理2及上面的各参数, 由Matlab中LMI工具箱可解得系统(1)的未知量:

$$\varepsilon_0 = 6,\quad \varepsilon_1 = 7,\quad \varepsilon_2 = 8,\quad \varepsilon_a = 9,$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} 9.1327 & -6.1162 \\ -6.1162 & 6.7031 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}_2 = \begin{pmatrix} 5.2536 & -3.2116 \\ -3.2116 & 2.6262 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0.2602 & -0.2602 \\ 0.7531 & 0.9853 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y} = (-0.1102\quad -0.1091),\qquad \boldsymbol{K} = (-0.0585\quad -0.1262).$$

相应的性能指标为 $J^* = 3.2356$.

综上, 本文研究了含有不确定项的变时滞系统的非脆弱 $\boldsymbol{H}_\infty$ 保性能控制问题, 针对控制器具有加法增益时给出了问题可解的充分条件和控制器的设计方法, 并将结果以线性矩阵不等式的形式给出. 所给算例验证了设计方法的有效性.

参 考 文 献

[1] XU Sheng-yuan, Dooren P, Van, Stefan R, et al. Robust Stability and Stabilization for Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

[2] LI Wen-lin, XIAO Nan. Non-fragile H_∞ Guaranteed Cost H_∞ Control for a Class of Time-Varying Delay Systems with Uncertainty [J]. Journal of Tsinghua University: Sci & Tech, 2008, 48(2): 1702-1706. (李文林, 肖楠. 不确定变时滞系统的非脆弱保性能 H_∞ 控制 [J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2008, 48(2): 1702-1706.)

[3] LI Jie-kun. Robust Control and Guaranteed Cost Control for Uncertain Nonlinear Systems [J]. Journal of Liuzhou Teachers College, 2009, 24(5): 105-109. (李洁坤. 一类不确定非线性广义时滞系统的鲁棒控制与保性能控制 [J]. 柳州师专学报, 2009, 24(5): 105-109.)

[4] LIU Xiang-fu, XING Wei. Guaranteed Cost Control of Delayed Singular Systems with Linear Fractional Parametric Uncertainties [J]. Journal of Kunming University of Science and Technology: Science and Technology, 2008, 33(1): 33-37. (刘祥福, 邢伟. 线性分式参数不确定时滞广义系统保性能控制 [J]. 昆明理工大学学报: 理工版, 2008, 33(1): 33-37.)

[5] Kim J H. Delay-Dependent Robust and Non-fragile Guaranteed of Cost Control for Uncertain Singular Systems with Time-Varying State and Input Delays [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2009, 7(3): 357-364.

[6] HU Nan-hui, JIN Han-yong, CHEN De-yin. H_∞ Guaranteed Cost Control for Singular System with State Delay and Parameter Uncertainty [J]. Electric Machines and Control, 2008, 12(3): 331-336. (胡南辉, 金韩永, 陈德银. 不确定时滞广义系统的 H_∞ 保性能控制 [J]. 电机与控制学报, 2008, 12(3): 331-336.)

[7] Petersen Z R. A Stabilization Algorithm for a Class Uncertain Linear Systems [J]. Systems & Control Letters, 1987, 8(4): 351-357.

[8] WANG Yong-yi, XIE Li-hua, Souza E, De. Robust Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems [J]. Systems & Control Letters, 1992, 19: 139-149.