第49卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol.49 No.3
2011年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2011

研究简报

Clifford 分析中 k 正则函数的线性边值问题

汤 获[1,2], 李书海[1], 马丽娜[1]
(1. 赤峰学院 数学学院, 内蒙古 赤峰 024000; 2. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

摘要: 利用积分方程的方法和压缩映射原理研究 Clifford 分析中 k 正则函数的线性边值问题, 证明了解的存在性和唯一性, 得到了解的积分表达式.

关键词: Clifford 分析; k 正则函数; 线性边值问题
中图分类号: O174.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)03-0462-03

Linear Boundary Value Problem for k Regular Functions in Clifford Analysis

TANG Huo[1,2], LI Shu-hai[1], MA Li-na[1]
(1. *College of Mathematics, Chifeng University, Chifeng* 024000, *Inner Mongolia Autonomous Region, China*;
2. *School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)

Abstract: With the help of the theory of integral equation and contact mapping theorem, linear boundary value problem for k regular functions in Clifford analysis was investigated. The existence and uniqueness of the solution to the above problem were proved, and the integral representation of its solution was obtained.

Key words: Clifford analysis; k regular functions; linear boundary value problem

近年来, Clifford 分析中的函数理论得到人们广泛关注, 文献[1-2]研究了取值在 Clifford 代数上正则函数的性质; 文献[3]推广了文献[2]的工作; 文献[4-5]研究了双正则函数或广义双正则函数的非线性边值问题. 而对 k 正则函数的研究目前报道较少, 文献[6]定义了 k 正则函数, 并讨论了它的表示定理、Cauchy 型积分、Plemelj 公式等性质; 文献[7-8]研究了 k 正则函数的 Riemann 边值问题及其逆问题. 本文在上述工作的基础上, 利用转化法研究 k 正则函数的一类线性边值问题.

1 预备知识

设 $A_n(R)$ 为实 Clifford 代数, 其基为 $e_1=1, e_2, \cdots, e_n$; $e_2e_3, \cdots, e_{n-1}e_n$; $\cdots$; $e_2\cdots e_n$, 且 $e_1^2=1$, $e_k^2=-1$, $k=2,3,\cdots,n$, $e_ie_j+e_je_i=0$, $i\neq j$, $i, j=2,3,\cdots,n$. 记以 $e_1,\cdots,e_n$ 为基底的 n 维实向量空间为 R^n, R^n 中元素为 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k$, $x_k\in R$. $A_n(R)$ 中元素 u 可表示成 $u=\sum\limits_{A}u_Ae_A$, $u_A\in R$, 其中 $e_A=e_{\alpha_1}\cdots e_{\alpha_h}=e_{\alpha_1\cdots\alpha_h}$, $A=\{\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_h\}\subseteq\{2,\cdots,n\}$, $2\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h\leqslant n$. 若 $A=\varnothing$, 记 $e_\varnothing=e_0$ 为单位元. 定义 $|u|^2=\sum\limits_{A}|u_A|^2$, 则有下列不等式成立: $|u+v|\leqslant|u|+|v|$, $|uv|\leqslant J_0|u||v|$, 式中 J_0 是一个正常数. 记 C^r 类函数集合如下: $F_D^{(r)}=\left\{f|f: D\to A_n(R), f(x)=\sum\limits_{A}f_A(x)e_A, f_A(x)\in C^r(D)\right\}$, 式中: $r\geqslant1$; D 为 R^n 中的非空连通开集.

定义算子 $\bar\partial=e_1\partial_1+e_2\partial_2+\cdots+e_n\partial_n$, $\partial_i=\partial/\partial x_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

收稿日期: 2010-04-06.
作者简介: 汤 获(1979—), 男, 汉族, 硕士, 讲师, 从事复分析及其边值问题的研究, E-mail: thth2009@tom.com. 通讯作者: 李书海(1966—), 男, 蒙古族, 教授, 从事复分析及其应用的研究, E-mail: lishms66@sina.com.
基金项目: 内蒙古自然科学基金(批准号: 2010MS0117)和内蒙古高校科研基金(批准号: NJzc08160).

定义 1[2]　对于 $f\in F_D^{(r)}(r\geqslant 1)$，若在 D 内 $\bar{\partial} f=\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=0$，则称 f 为 D 内的左正则函数，简称为正则函数.

定义 2[6]　对于 $f\in F_D^{(r)}(r\geqslant k)$，若在 D 内满足 $\bar{\partial}^k f=0$，则称 f 为 D 内 k 正则函数.

假设 Ω 是 R^n 中的连通开集，且 $\Omega\subset D$，其边界 Σ 是光滑紧致定向的 Liapunov 曲面，记 Ω 为 Σ^+，$R^n\backslash\bar{\Omega}$ 为 Σ^-，$H(\Sigma,\alpha)$ 为 Σ 上的 Hölder 连续函数类. 定义 $\|\phi\|_\alpha=C(\phi,\Sigma)+H(\phi,\Sigma,\alpha)$，其中：

$$C(\phi,\Sigma)=\max_{t\in\Sigma}|\phi(t)|;\quad H(\phi,\Sigma,\alpha)=\sup_{t\neq t';\ t,t'\in\Sigma}\frac{|\phi(t)-\phi(t')|}{|t-t'|^\alpha};\quad 0<\alpha<1.$$

则对任意的 $\phi_1,\phi_2\in H(\Sigma,\alpha)$，有

$$\|\phi_1+\phi_2\|_\alpha\leqslant\|\phi_1\|_\alpha+\|\phi_2\|_\alpha,\qquad \|\phi_1\phi_2\|_\alpha\leqslant 2^{n-1}\|\phi_1\|_\alpha\|\phi_2\|_\alpha. \tag{1}$$

引理 1[3]　若 $\phi(t)\in H(\Sigma,\alpha)$，则

$$\|K\phi\|_\alpha\leqslant C\|\phi\|_\alpha, \tag{2}$$

其中：$K\phi=\frac{1}{w_{n-1}}\int_\Sigma\frac{\overline{\tau-t}}{|\tau-t|^n}m(\tau)\phi(\tau)\mathrm{d}s_\tau$，$w_{n-1}$ 为 R^n 中单位超球的面积；C 为正常数.

引理 2[6]　设 f 为 D 中的 k 正则函数，则 f 可表示为

$$f=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{1}{m!}x_1^m\varphi_m, \tag{3}$$

其中 $\varphi_m(m=0,1,\cdots,k-1)$ 为 D 内任意正则函数.

问题 1　设 Ω 是 R^n 中的连通开集，且 $\Omega\subset D$，其边界 Σ 是光滑紧致定向的 Liapunov 曲面，求一分片 k 正则函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)$，使得其在 Σ 上适合边界条件

$$\bar{\partial}^m\boldsymbol{\Phi}^+A(t)+\bar{\partial}^m\boldsymbol{\Phi}^-B(t)=g_m(t),\qquad m=0,1,\cdots,k-1, \tag{4}$$

这里：$t\in\Sigma$；$A(t),B(t),g_m(t)\in H(\Sigma,\alpha)(m=0,1,\cdots,k-1)$ 是给定的函数.

设所求 k 正则函数

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\frac{1}{(k-1)!}x_1^{k-1}\boldsymbol{\Psi}_{k-1}+\frac{1}{(k-2)!}x_1^{k-2}\boldsymbol{\Psi}_{k-2}+\cdots+x_1\boldsymbol{\Psi}_1+\boldsymbol{\Psi}_0, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}_{k-1}$，$\boldsymbol{\Psi}_{k-2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\Psi}_0$ 为 Σ 上的待定函数.

将式(5)代入式(4)，得

$$\boldsymbol{G}(t_1)\boldsymbol{W}^+(t)A(t)+\boldsymbol{G}(t_1)\boldsymbol{W}^-(t)B(t)=\boldsymbol{g}(t),\qquad t\in\Sigma, \tag{6}$$

这里：

$$\boldsymbol{W}(x)=(\boldsymbol{\Psi}_0(x),\boldsymbol{\Psi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\Psi}_{k-1}(x))^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{W}^+(t)=(\boldsymbol{\Psi}_0^+(t),\boldsymbol{\Psi}_1^+(t),\cdots,\boldsymbol{\Psi}_{k-1}^+(t))^{\mathrm{T}};\qquad \boldsymbol{W}^-(t)=(\boldsymbol{\Psi}_0^-(t),\boldsymbol{\Psi}_1^-(t),\cdots,\boldsymbol{\Psi}_{k-1}^-(t))^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{g}(t)=(g_0(t),g_1(t),\cdots,g_{k-1}(t))^{\mathrm{T}};\qquad \boldsymbol{G}(t_1)=\begin{pmatrix}1 & t_1 & t_1^2/2 & \cdots & t_1^{k-1}/(k-1)!\\ 0 & 1 & t_1 & \cdots & t_1^{k-2}/(k-2)!\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & t_1^{k-3}/(k-3)!\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{G}(t_1)$ 中元都是实数，故其逆 $\boldsymbol{G}^{-1}(t_1)$ 存在，则式(6)可化为

$$\boldsymbol{W}^+(t)A(t)+\boldsymbol{W}^-(t)B(t)=\boldsymbol{G}^{-1}(t_1)\boldsymbol{g}(t),\qquad t\in\Sigma. \tag{7}$$

令 $\boldsymbol{G}^{-1}(t_1)\boldsymbol{g}(t)=(g_0',g_1',\cdots,g_{k-1}')^{\mathrm{T}}$，则式(7)等价于 k 个独立正则函数的线性边值问题

$$\boldsymbol{\Psi}_i^+(t)A(t)+\boldsymbol{\Psi}_i^-(t)B(t)=g_i'(t), \tag{8}$$

其中 $t\in\Sigma$，$\boldsymbol{\Psi}_i(t)(i=0,1,\cdots,k-1)$ 是分片正则函数.

设 $\boldsymbol{\Psi}_i(x)=\frac{1}{w_{n-1}}\int_\Sigma\frac{\overline{\tau-x}}{|\tau-x|^n}m(\tau)\varphi_i(\tau)\mathrm{d}s_\tau$，其中 $\varphi_i(\tau)\in H(\Sigma,\alpha)$ 是待定的 Hölder 连续函数，则将正则函数的 Plemelj 公式[2] $\boldsymbol{\Psi}_i^\pm(t)=\pm\varphi_i(t)/2+P\varphi_i(t)(t\in\Sigma)$ 代入式(8)，得

$$(\varphi_i/2 + P\varphi_i)A + (-\varphi_i/2 + P\varphi_i)B = g_i', \quad t \in \Sigma, \quad i = 0,1,\cdots,k-1. \tag{9}$$

引入算子 $F\varphi_i = (\varphi_i/2 + P\varphi_i)(A+B) + \varphi_i(1-B) - g_i'$，则式(9)可写为

$$F\varphi_i = \varphi_i, \qquad i = 0,1,\cdots,k-1. \tag{10}$$

于是，问题1可转化为 k 个形如式(10)的积分方程.

2 问题1解的存在唯一性及积分表达式

令 $T_i = \{\varphi_i \mid \varphi_i \in H(\Sigma,\alpha), \|\varphi_i\|_\alpha \leqslant M\}$ 表示 Banach 空间 $H(\Sigma,\alpha)$ 的闭子空间，在条件

$$\gamma = [2^{n-2}(1+2C)\|A+B\|_\alpha + 2^{n-1}\|1-B\|_\alpha] \in (0,1), \qquad \|g_i'\|_\alpha \leqslant M(1-\gamma) \tag{11}$$

下，由式(1)和(2)，有

$$\|F\varphi_i\|_\alpha \leqslant 2^{n-2}\|A+B\|_\alpha(\|\varphi_i\|_\alpha + 2C\|\varphi_i\|_\alpha) + 2^{n-1}\|1-B\|_\alpha\|\varphi_i\|_\alpha + \|g_i'\|_\alpha \leqslant$$
$$[2^{n-2}(1+2C)\|A+B\|_\alpha + 2^{n-1}\|1-B\|_\alpha]M + \|g_i'\|_\alpha \leqslant \gamma M + \|g_i'\|_\alpha \leqslant M,$$

即 F 是由 T_i 到 T_i 自身的映射.

任取 $\varphi_i', \varphi_i'' \in H(\Sigma,\alpha)$，有

$$\|F\varphi_i'' - F\varphi_i'\|_\alpha \leqslant [2^{n-2}(1+2C)\|A+B\|_\alpha + 2^{n-1}\|1-B\|_\alpha]\|\varphi_i'' - \varphi_i'\|_\alpha \leqslant \gamma\|\varphi_i'' - \varphi_i'\|_\alpha.$$

又 $0<\gamma<1$，故 F 是 Banach 空间 T_i 到 T_i 自身的压缩映射，由压缩映射原理可知，存在唯一的不动点 φ_i，使得 $F\varphi_i = \varphi_i$，所以式(8)有唯一解：

$$\Psi_i(x) = \frac{1}{w_{n-1}}\int_\Sigma \frac{\overline{\tau - x}}{|\tau - x|^n} m(\tau)\varphi_i(\tau)\,\mathrm{d}s_\tau, \qquad i = 0,1,\cdots,k-1, \tag{12}$$

即问题1有唯一解

$$\Phi(x) = \frac{1}{(k-1)!}x_1^{k-1}\Psi_{k-1} + \frac{1}{(k-2)!}x_1^{k-2}\Psi_{k-2} + \cdots + x_1\Psi_1 + \Psi_0, \qquad i = 0,1,\cdots,k-1. \tag{13}$$

定理1 在条件(11)下，问题1有唯一解式(13)，其中：$\Psi_i(x)$ 定义如式(12)，φ_i 由式(10)确定.

参 考 文 献

[1] Brackx F, Delange R, Sommon F. Clifford Analysis [M]. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[2] XU Zhen-yuan. On Linear and Nonlinear Riemann-Hilbert Problems for Regular Function with Values in a Clifford Algebra [J]. Chin Ann of Math: Ser B, 1990, 11(3): 349-358.

[3] ZHANG Zhong-xiang, DU Jin-yuan. On Certain Riemann Boundary Value Problems and Singular Integral Equations in Clifford Analysis [J]. Chinese Annals of Math: Ser A, 2001, 22(4): 421-426. (张忠祥, 杜金元. 关于 Clifford 分析中的某些 Riemann 边值问题与奇异积分方程 [J]. 数学年刊: A 辑, 2001, 22(4): 421-426.)

[4] HUANG Sha. Nonlinear Boundary Value Problem for Biregular Function in Clifford Analysis [J]. Science in China: Ser A, 1996, 26(3): 227-236. (黄沙. Clifford 分析中双正则函数的非线性边值问题 [J]. 中国科学: A 辑, 1996, 26(3): 227-236.)

[5] HUANG Sha. (Linear) Nonlinear Boundary Value Problems for Generalized Biregular Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Math, 1997, 40(6): 913-920. (黄沙. Clifford 分析中广义双正则函数的(线性)非线性边值问题 [J]. 数学学报, 1997, 40(6): 913-920.)

[6] TANG Huo, LI Xing. k-Regular Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Ningxia University: Natural Science Edition, 2009, 30(1): 6-8. (汤获, 李星. Clifford 分析中的 k 正则函数 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2009, 30(1): 6-8.)

[7] TANG Huo. Some Properties for k-Regular Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Chifeng University: Natural Science Edition, 2008, 24(1): 14-15. (汤获. Clifford 分析中 k 正则函数的某些性质 [J]. 赤峰学院学报: 自然科学版, 2008, 24(1): 14-15.)

[8] TANG Huo, YANG Xiao-chun. Riemann Boundary Value Problems and Inverse Problems for a Kind of k Regular Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Southwest University for Nationalities: Natural Science Edition, 2008, 34(1): 6-11. (汤获, 杨晓春. Clifford 分析中一类 k 正则函数的 Riemann 边值问题和它的逆问题 [J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2008, 34(1): 6-11.)