第49卷　第4期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 49　No. 4
2011年7月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　July　2011

MA(∞)误差下部分线性模型的经验似然统计推断

于卓熙[1]，王德辉[2]
(1. 吉林财经大学 管理科学与信息工程学院，长春 130117；2. 吉林大学 数学学院，长春 130012)

摘要：应用经验似然方法，针对误差为不可观测无穷阶滑动平均过程的部分线性模型，构造了回归参数的对数经验似然比检验统计量，并证明了统计量在参数取真值时渐近地服从χ^2分布，构造了参数的置信区间. 模拟计算表明，经验似然方法优于最小二乘方法.

关键词：部分线性模型；MA(∞)误差过程；经验似然
中图分类号：O212.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2011)04-0615-10

Empirical Likelihood in Partial Linear Models with MA(∞) Error Process

YU Zhuo-xi[1], WANG De-hui[2]
(1. *School of Management Science and Information Engineering*, *Jilin University of Finance and Economics*, *Changchun* 130117, *China*; 2. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: The authors concerned the partial linear models with serially correlated random errors which are not observed and modeled by a moving-average process of infinte order. We proposed an empirical log-likelihood ratio statistic for the regression coefficients. Our results show that the statistic is asymptotically chi-square distributed and the corresponding confidence interval can be constructed accordingly. A simulation illustrates that the empirical likelihood method works better than the ordinary least squares method.

Key words: partial linear regression model; MA(∞) error process; empirical likelihood

0　引　言

考虑如下部分线性模型：

$$y_i = \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} + g(t_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

其中：y_i 是反应变量；$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \cdots, x_{ip})^{\mathrm{T}}$ 是非随机设计点；$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_p)^{\mathrm{T}}$ 是未知参数向量；$t_i \in [0,1]$；$g(\cdot)$是定义在$[0,1]$上的未知有界实值函数；ε_i 是不可观测的误差项.

文献[1]应用模型(1)拟合了公用事业行业的早期消费曲线. 在误差变量 $\varepsilon_i's$ 是 i. i. d 的情形下，文献[2-6]分别用不同的方法获得了模型(1)未知量的估计.

收稿日期：2010-11-17.

作者简介：于卓熙(1970—)，女，汉族，博士，副教授，从事数理统计的研究，E-mail：yzx8170561@163.com. 通讯作者：王德辉(1968—)，男，汉族，博士，教授，博士生导师，从事数理统计的研究，E-mail：Wangdehui69@163.com.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：10971081；J0630104)、新世纪优秀人才支持计划(批准号：NCET-08-237)、高等学校博士学科点专项基金(批准号：20070183023)、吉林省自然科学基金(批准号：20101599；201015100)和吉林大学基本科研业务费项目(批准号：200810024).

在实际问题中, 误差独立同分布的假设并不总合适. 近年来, 具有序列相依误差的部分线性回归模型的研究已引起人们广泛关注. 用于误差建模的一种无穷阶滑动平均过程即为 MA(∞)过程, 假设$\{\varepsilon_i\}$具有如下形式:

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j e_{i-j}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty}|\phi_j| < \infty, \tag{2}$$

这里$\{e_i\}$是 i. i. d. 随机变量列, 满足 $E(e_0)=0$, $\mathrm{Var}(e_0)=\sigma_e^2<\infty$. 文献[7]应用文献[8]给出的线性过程多项式分解方法获得了参数$\boldsymbol{\beta}$的半参数最小二乘估计(SLSE)的重对数律和渐近正态性. 文献[9]应用 MA(∞)过程截断方法在更一般的情形下证明了参数$\boldsymbol{\beta}$的 SLSE 的重对数律.

经验似然是一类重要的构造非参数置信区间和检验的方法, 文献[10]对此方法的一般性质进行了系统研究. 文献[11-12]研究表明, 经验似然有类似于参数似然法的优良性, 特别是对数形式类似于 Wilk's 理论, 趋于χ^2分布. 文献[13-14]给出了用分组经验似然方法处理强相依的数据.

本文在误差由式(2)定义的 MA(∞)过程下应用经验似然方法构造了 MA(∞)误差下模型(1)回归系数的经验似然比检验统计量, 并讨论了该统计量的渐近性质.

1 方法与主要结果

假设随机误差$\{\varepsilon_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$构成由式(2)定义的 MA($\infty$)过程, 且令 $\varepsilon_i = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j e_{i-j} = C(L)e_i$, $C(L) = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j L^j$, 则 $C(1) = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j$, 假设 $0<|C(1)|<\infty$.

给定$\boldsymbol{\beta}$时 $g(\cdot)$的一个非参数估计量为

$$\hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t)(y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}),$$

这里 $W_{ni}(\cdot)(1\leqslant i\leqslant n)$是一些定义在$[0,1]$上的权函数.

令

$$\tilde{y}_i = y_i - \sum_{j=1}^{n} W_{nj}(t_i)y_j, \qquad \tilde{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{n} W_{nj}(t_i)\boldsymbol{x}_j,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{Z}_i = \widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} - \hat{g}_n(t_i)).$$

$\boldsymbol{\beta}$的对数经验似然比统计量定义为

$$l(\boldsymbol{\beta}) = 2\sum_{i=1}^{n}\log\{1+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Z}_i\}, \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\beta})\in R^p$ 定义如下:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{Z}_i}{1+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Z}_i} = 0. \tag{4}$$

假设:

(H_1) 存在定义在$[0,1]$上的函数 $h_j(\cdot)$, 使得

$$x_{ij} = h_j(t_i) + u_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n, \quad j=1,2,\cdots,p, \tag{5}$$

这里$(u_{i1},\cdots,u_{ip})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{u}_i$是实值向量, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}, \tag{6}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\log n}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left\|\sum_{i=1}^{m}u_{j_i}\right\| < \infty, \tag{7}$$

其中: $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵; $(j_1,\cdots,j_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的任意置换; $\|\cdot\|$表示欧氏模;

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\boldsymbol{u}_i\| \leqslant C < \infty, \tag{8}$$

C 是不依赖于 n 的常数.

(H_2) 函数 $g(\cdot)$, $h_j(\cdot)(j=1,2,\cdots,n)$满足一阶 Lipschitz 条件.

(H_3) 权函数 $W_{ni}(\cdot)$满足：

(i) $\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$;

(ii) $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n} W_{ni}(t_j) = O(1)$;

(iii) $\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} W_{ni}(t_j) = O(b_n)$, 这里 $b_n = o(n^{-2/3}(\log n)^{-2})$;

(iv) $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n} W_{nj}(t_i)|t_i - t_j| I(|t_i - t_j| > d_n) = O(d_n)$, 这里 $d_n = O(n^{-1/3}(\log n)^{-1})$;

(v) $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|W_{ni}(s) - W_{ni}(t)| \leqslant c_2|s-t|$对 $s,t\in[0,1]$一致成立, 这里 c_2 是一个常数.

(H_4) 由式(2)所定义的误差过程$\{\varepsilon_i\}$满足如下条件：

(i) $E(e_0^4)<\infty$, $\sup_{n\geqslant 1} n\sum_{j=n}^{\infty}|\phi_j| < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\phi_j^2 < \infty$;

(ii) $\{\varepsilon_i\}$的谱密度函数 $\psi(\omega)$有界非零, 即

$$0 < c_3 \leqslant \psi(\omega) \leqslant c_4 < \infty, \qquad \omega \in (-\pi,\pi],$$

这里 c_3 和 c_4 是常数.

定理 1　令 $\boldsymbol{\beta}_0$ 为参数的真值, 假设(H_1) ~ (H_4)成立, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2/C(1)^2\Big) l(\boldsymbol{\beta}_0) \xrightarrow{D} \chi_p^2,$$

这里$\xrightarrow{D}$表示依分布收敛.

由定理 1, 可以建立 $\boldsymbol{\beta}$ 的 α-水平置信域：

$$J_\alpha = \Big\{\boldsymbol{\beta}:\ l(\boldsymbol{\beta}) \leqslant \Big(C(1)^2\Big/\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2\Big)c_\alpha\Big\},$$

这里 c_α 满足$P(\chi_p^2\leqslant c_\alpha) = 1-\alpha$.

2　模拟计算

下面通过模拟计算比较经验似然方法和渐近正态方法. 为简单, 只考虑 β 为标量的情况.

应用模型 $y_i = x_i\beta + g(t_i) + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \theta\varepsilon_{i-1} + e_i$, 这里 $g(t_i) = \sin(2\pi t_i)$, $\beta = 1.5$, 设计点 $t_i's$ 从固定种子 10 的 $U[0,1]$分布中产生, 设计点 x_i' 产生于 $x_i = t_i^2 + v_i$, 这里 v_i 是 i. i. d. 的且服从 $T(3)$分布, e_i 是 i. i. d. 的且服从 $N(0,1)$分布.

由文献[7]中定理 1 知, β 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_n = \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{y}_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2$ 渐近服从正态分布, 即

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2 B^{-1}),$$

这里：$\sigma^2 = \sigma_e^2 C(1)^2$; $B = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2$. 所以, β 的水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$(\hat{\beta}_n - Z_{1-\alpha/2}C(1)\sigma_e/(\sqrt{n}B^{1/2}),\ \hat{\beta}_n + Z_{1-\alpha/2}C(1)\sigma_e/(\sqrt{n}B^{1/2})),$$

这里 Z_α 满足 $\Phi(Z_\alpha) = \alpha$, $\Phi(\cdot)$是标准正态分布的分布函数. 权函数具有如下形式：

$$W_{ni}^{(2)}(t) = K\Big(\frac{t-t_i}{h_n}\Big)\Big[\sum_{j=1}^{n} K\Big(\frac{t-t_j}{h_n}\Big)\Big]^{-1},$$

其中核函数 $K(t)$是高斯核, 由最小平方交叉核实方法(LSCV)选取带宽 h_n. 样本容量分别取 50,100 和 200; $\alpha = 0.10$, $\alpha = 0.05$. 基于 500 次模拟, 计算经验似然(EL)和渐近正态方法(LS)的覆盖率, 结果列于表 1. 由表 1 可见, 两种方法在 $\theta > 0$ 时结果较好. 由于由两种方法构造置信区间时都有

$C(1)=1/(1-\theta)$, 因此在考虑的所有情形下, EL 方法比 LS 方法结果更好.

表 1　$\boldsymbol{\beta}$ 的覆盖率

Table 1　Coverage probabilities for $\boldsymbol{\beta}$

样品容量 n	参数 α	方法	θ						
			−0.5	−0.3	−0.15	0	0.15	0.3	0.5
50	0.10	LS	0.556 4	0.668 8	0.746 0	0.809 8	0.866 4	0.925 2	0.978 0
		EL	0.639 2	0.734 2	0.829 4	0.883 6	0.922 6	0.968 0	0.992 2
	0.05	LS	0.563 8	0.678 8	0.767 0	0.833 8	0.902 4	0.958 2	0.994 4
		EL	0.646 6	0.774 8	0.861 2	0.913 4	0.959 0	0.987 4	0.999 2
100	0.10	LS	0.564 6	0.667 6	0.763 6	0.826 8	0.888 8	0.938 6	0.983 8
		EL	0.653 0	0.758 2	0.842 8	0.896 4	0.940 6	0.971 4	0.995 4
	0.05	LS	0.568 4	0.674 8	0.773 4	0.843 2	0.912 4	0.957 6	0.992 6
		EL	0.656 8	0.770 2	0.860 6	0.918 4	0.958 4	0.986 8	0.998 8
200	0.10	LS	0.580 0	0.669 0	0.767 2	0.828 4	0.888 0	0.934 0	0.983 0
		EL	0.661 8	0.756 4	0.841 8	0.896 2	0.942 4	0.970 6	0.996 8
	0.05	LS	0.577 6	0.685 4	0.779 6	0.845 0	0.906 8	0.952 8	0.992 6
		EL	0.668 8	0.778 8	0.861 2	0.914 6	0.958 6	0.983 0	0.998 4

3　定理的证明

引理 1　1) 假设(H_2)和(H_3)中(iv)成立, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\max_{0\leqslant j\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|G_{ij}|=\max_{0\leqslant j\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|G_j(t_i)-\sum_{k=1}^{n}W_{nk}(t_i)G_j(t_k)\right|=O(n^{-1/3}(\log n)^{-1}),$$

这里 $G_0(\cdot)=g(\cdot)$, $G_j(\cdot)=h_j(\cdot)(1\leqslant j\leqslant p)$;

2) 假设(H_1)~(H_3)成立, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\max_{1\leqslant j\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\hat{h}_{nj}(t_i)-h_j(t_i)|=O(n^{-1/3}(\log n)^{-1})+o(n^{-1/6}(\log n)^{-1}),$$

这里 $\hat{h}_{nj}(t_i)=\sum_{k=1}^{n}W_{nk}(t_i)x_{kj}$.

引理 1 的证明与文献[7]中引理 2 的证明类似.

引理 2　假设(H_1)~(H_3)成立, 则 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.

引理 2 的证明与文献[7]中引理 3(i)的证明类似.

引理 3　对于式(2)中的线性过程, 假设(H_3)中(iii)和(v)、(H_4)中(i)成立, 则

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\right|=O(n^{-1/3}\log n)\ \text{a. s.}$$

证明参见文献[9]中引理 2.

引理 4　对于式(2)中的线性过程, 假设(H_4)中(i)成立, 则 $\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_{j_i}\right|=O(n^{1/2}\log n)$ a. s., 这里($j_1,j_2,\cdots,j_n$)是($1,2,\cdots,n$)的任意置换.

证明参见文献[9]中引理 4.

引理 5　假设(H_1)~(H_4)成立, 则 $\boldsymbol{Z}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\boldsymbol{Z}_i\|=o(n^{1/2})$ a. s.

证明:

$$\boldsymbol{Z}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i(y_i-\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}-\hat{g}_n(t_i))\|\leqslant$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{V}}_n\|^{-1/2}2(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\boldsymbol{u}_i\|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\boldsymbol{h}(t_i)\|)\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}(t_i)|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varepsilon_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\right|\right),$$

这里: $\boldsymbol{h}(t_i)=(h_1(t_i),\cdots,h_p(t_i))^{\mathrm{T}}$; $\tilde{g}(t_i)=g(t_i)-\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)g(t_j)$.

下面证明

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varepsilon_i| = O(n^{1/4}\log n)\ \text{a. s.} \tag{9}$$

由于

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varepsilon_i|\geqslant n^{1/4}\log n) = P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j e_{i-j}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\phi_j e_{i-j}\Big|\geqslant n^{1/4}\log n\Big)\leqslant$$

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j e_{i-j}\Big|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty}\phi_j e_{i-j}\Big|\geqslant n^{1/4}\log n\Big)\leqslant$$

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j e_{i-j}\Big|\geqslant n^{1/4}\log n/2\Big)+P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty}\phi_j e_{i-j}\Big|\geqslant n^{1/4}\log n/2\Big),$$

故由 Chebychev 不等式，得

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty}\phi_j e_{i-j}\Big|\geqslant n^{1/4}\log n/2\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\phi_j e_{i-j}|\geqslant n^{1/4}\log n/2\Big)\leqslant\frac{4\sum_{i=1}^{n}E\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\phi_j e_{i-j}|\Big)^2}{n^{1/2}(\log n)^2}\leqslant$$

$$\frac{4\sigma_e^2 n\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\phi_j|^2+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=n+1}^{\infty}|\phi_j||\phi_{j+k}|\Big)}{n^{1/2}(\log n)^2}\leqslant$$

$$4\sigma_e^2 n^{1/2}(\log n)^{-2}\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\phi_j|\Big)^2 = O(n^{-3/2}(\log n)^{-2}),$$

从而，由 Borel-Cantelli 引理可得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty}\phi_j e_{i-j}\Big| = O(n^{1/4}\log n)\ \text{a. s.} \tag{10}$$

令 $\tilde e_i = e_i I(|e_i|\leqslant|i|^{1/4})$. 由 $Ee_0^4<\infty$ 和三级数定理，有 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|e_i-\tilde e_i|<\infty$ a. s.，而

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j e_{i-j}\Big|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j(e_{i-j}-\tilde e_{i-j})\Big|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j E(e_{i-j}-\tilde e_{i-j})\Big|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j(\tilde e_{i-j}-E\tilde e_{i-j})\Big|,$$

注意到

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j(e_{i-j}-\tilde e_{i-j})\Big|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=0}^{n}|\phi_j||e_{i-j}-\tilde e_{i-j}|\leqslant\sum_{j=0}^{+\infty}|\phi_j|\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|e_i-\tilde e_i| = O(1)\ \text{a. s.}$$

同理可得 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j E(e_{i-j}-\tilde e_{i-j})\Big| = O(1)$. 应用 Bernstein’s 不等式，存在 $c_5>0$，使得

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j(\tilde e_{i-j}-E\tilde e_{i-j})\Big|\geqslant c_5 n^{1/4}\log n\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\Big(\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j(\tilde e_{i-j}-E\tilde e_{i-j})\Big|\geqslant c_5 n^{1/4}\log n\Big)\leqslant$$

$$2n\exp\left\{-\frac{(c_5 n^{1/4}\log n/\sigma)^2}{2+(4/3)\sum_{j=0}^{\infty}|\phi_j|(c_5 n^{1/2}\log n/\sigma^2)}\right\} = 2n\exp\left\{-\frac{c_5^2 n^{1/2}(\log n)^2}{2\sigma^2+(4/3)\sum_{j=0}^{\infty}|\phi_j|(c_5 n^{1/2}\log n)}\right\}\leqslant$$

$$2n\exp\left\{-\frac{c_5^2 n^{1/2}(\log n)^2}{2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\phi_j|^2\Big)E(e_1^2)+(4/3)\sum_{j=0}^{\infty}|\phi_j|(c_5 n^{1/2}\log n)}\right\} = O(2ne^{-c_6c_5\log n}),$$

这里：$\sigma^2 = \mathrm{Var}\Big(\sum_{j=0}^{n}\phi_j(\tilde e_{i-j}-E\tilde e_{i-j})\Big)\leqslant\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\phi_j|^2\Big)E(e_1^2)$；$c_6$ 是一个正的常数. 所以，正确选择 c_6，并应用 Borel-Cantelli 引理，可得 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j(\tilde e_{i-j}-E\tilde e_{i-j})\Big| = O(n^{1/4}\log n)$ a. s. 由以上证明可得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=0}^{n}\phi_j e_{i-j}\Big| = O(n^{1/4}\log n)\ \text{a. s.} \tag{11}$$

结合式(10)和(11)，即可得式(9). 应用引理 1 中 1)、引理 2 和引理 3、(H_1)和(H_2)，即可完成

引理5的证明.

引理6 假设(H_1)~(H_4)成立, 则有 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i \xrightarrow{D} N(0,\sigma_e^2 C(1)^2 I_p)$.

证明: 由 $\boldsymbol{Z}_i$ 的定义, 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i = \widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big) + \sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{g}(t_i)\Big\}.$$

对于 $1\leqslant k\leqslant p$, 用 $\tilde{x}_{ik}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ 的第 k 个元素, 应用假设(H_1)和引理1, 有

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ik}\tilde{g}(t_i)\Big| = {} & \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(x_{ik} - \sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)x_{lk}\Big)\tilde{g}(t_i)\Big| = \\
& \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big\{u_{ik} + h_k(t_i) - \sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)(u_{lk} + h_k(t_l))\Big\}\tilde{g}(t_i)\Big| \leqslant \\
& \Big|\sum_{i=1}^{n}u_{ik}\tilde{g}(t_i)\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(h_k(t_i) - \sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)h_k(t_l)\Big)\tilde{g}(t_i)\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)u_{lk}\Big)\tilde{g}(t_i)\Big| \leqslant \\
& \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}(t_i)|\max_{1\leqslant s\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{s}u_{ik}\Big| + n\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|h_k(t_i) - \sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)h_k(t_l)\Big|\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}(t_i)| + \\
& n\max_{1\leqslant k\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)u_{lk}\Big|\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{g}(t_i)| = \\
& O(n^{-1/3}(\log n)^{-1})O(n^{1/2}\log n) + nO(n^{-1/3}(\log n)^{-1})O(n^{-1/3}(\log n)^{-1}) + \\
& no(n^{-1/6}(\log n)^{-1})O(n^{-1/3}(\log n)^{-1}) = o(n^{1/2}),
\end{aligned}$$

这里 $\max_{1\leqslant k\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)u_{lk}\Big| = o(n^{-2/3}(\log n)^{-2})O(n^{1/2}\log n) = o(n^{-1/6}(\log n)^{-1})$. 类似于以上证明, 应用引理1和引理3, 可得

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ik}\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big)\Big| = {} & \Big|\sum_{i=1}^{n}u_{ik}\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big) + \\
& \sum_{i=1}^{n}\Big(h_k(t_i) - \sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)h_k(t_l)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{ni}(t_i)\varepsilon_j\Big) - \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)u_{lk}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big)\Big| \leqslant \\
& \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big|\max_{1\leqslant s\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{s}u_{ik}\Big| + n\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|h_k(t_i) - \sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)h_k(t_l)\Big|\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big| + \\
& n\max_{1\leqslant k\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{l=1}^{n}W_{nl}(t_i)u_{lk}\Big|\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\Big| = \\
& O(n^{-1/3}\log n)O(n^{1/2}\log n) + nO(n^{-1/3}(\log n)^{-1})O(n^{-1/3}\log n) + \\
& no(n^{-1/6}(\log n)^{-1})O(n^{-1/3}\log n) = o(n^{1/2})\ \text{a. s.}
\end{aligned}$$

下面证明 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\varepsilon_i \xrightarrow{D} N(0,\sigma_e^2 C(1)^2\boldsymbol{B})$. 注意到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\varepsilon_i = {} & \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\boldsymbol{x}_j\Big)\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Big\{\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{h}(t_i) - \sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{h}(t_j))\Big\}\varepsilon_i = \\
& \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i\varepsilon_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{h}(t_i) - \sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\boldsymbol{h}(t_j)\Big)\varepsilon_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\boldsymbol{u}_j\Big)\varepsilon_i.
\end{aligned}$$

对于 $1\leqslant k\leqslant p$, $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的任意置换, 应用引理4, 有

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(h_k(t_i) - \sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)h_k(t_j)\Big)\varepsilon_i\Big| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|h_k(t_i) - \sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)h_k(t_j)\Big|\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_{j_i}\Big| = o(n^{1/2})\ \text{a. s.},$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)u_{jk}\Big)\varepsilon_i\Big| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)u_{jk}\Big|\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_{j_i}\Big| = o(n^{1/2})\ \text{a. s.}$$

由文献[8]，有

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j e_{i-j} = C(1)e_i + \hat{e}_{i-1} - \hat{e}_i,$$

这里 $\hat{e}_i = \sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\phi}_j e_{i-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty}\phi_k\right)e_{i-j}$. 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i\varepsilon_i = C(1)\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i e_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i(\hat{e}_{i-1} - \hat{e}_i).$$

由假设(H_1)，有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}C(1)\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i e_i \xrightarrow{D} N(0,\sigma_e^2 C(1)^2\boldsymbol{B}).$$

应用 Abel 不等式，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ik}(\hat{e}_{i-1} - \hat{e}_i)\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|u_{ik}|(|\hat{e}_0| + \max_{1\leqslant m\leqslant n}|\hat{e}_m|), \qquad k = 1,2,\cdots,p.$$

由假设(H_4)，类似于文献[7]中引理 5 的证明，有

$$n^{-1}\hat{e}_0^2 \xrightarrow{P} 0, \qquad n^{-1}\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\hat{e}_m|^2 \xrightarrow{P} 0,$$

这里 $\xrightarrow{P}$ 表示依概率收敛.

结合以上证明并应用引理 2，即可完成引理 6 的证明.

引理 7　假设(H_1)~(H_4)成立，则

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i\right) = O_p(n^{-1/2}), \qquad \forall \boldsymbol{a} \in R^p.$$

证明：由引理 6 直接可得.

引理 8　假设(H_1)~(H_4)成立，令 $S = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}$，则 $S \xrightarrow{P} \sigma_e^2\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2\right)I_p$.

证明：

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} - \tilde{g}(t_i))\}\{\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} - \tilde{g}(t_i))\}^{\mathrm{T}} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}(y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} - \tilde{g}(t_i))^2 =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\right)^2 +$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)(g(t_i) - g(t_j))\right\}^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_i\left(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\right) +$$

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_i\left\{\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)(g(t_i) - g(t_j))\right\} -$$

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\right)\left\{\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)(g(t_i) - g(t_j))\right\} \triangleq$$

$$R_{n1} + R_{n2} + R_{n3} - R_{n4} + R_{n5} - R_{n6}.$$

应用引理 2 和引理 3，可得

$$\|R_{n2}\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}W_{nj}(t_i)\varepsilon_j\right|^2\left\|\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\right\| = O(n^{-2/3}(\log n)^2) \text{ a. s.}$$

应用引理 1，有

$$\|R_{n3}\| = O(n^{-2/3}(\log n)^{-2}).$$

由引理 3 和 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varepsilon_i| = O(n^{1/4}\log n)$ a. s.，可得

$$\| R_{n4} \| \leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Big| \sum_{j=1}^{n} W_{nj}(t_i)\varepsilon_j \Big| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\varepsilon_i| \Big\| \widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\Big)\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\Big\| = O(n^{-1/12}(\log n)^2) \text{ a. s.}$$

同理可证

$$\| R_{n5} \| = O(n^{-1/3}(\log n)^{-1})O(n^{1/4}\log n) = O(n^{-1/12}) \text{ a. s.},$$
$$\| R_{n6} \| = O(n^{-1/3}\log n)O(n^{-1/3}(\log n)^{-1}) = O(n^{-2/3}) \text{ a. s.}$$

下面证明

$$R_{n1} \xrightarrow{P} \sigma_e^2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2\Big)I_p. \tag{12}$$

由文献[8], 有

$$R_{n1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_{ai} + 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_{bi},$$

这里:

$$f_j(L) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k\phi_{k+j}L^k = \sum_{k=0}^{\infty}f_{jk}L^k, \qquad f_{jk} = \phi_k\phi_{k+j};$$
$$\varepsilon_{ai} = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2e_{i-j}^2 = f_0(L)e_i^2;$$
$$\varepsilon_{bi} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\phi_{j+r}e_{i-j}e_{i-j-r} = \sum_{r=1}^{\infty}f_r(L)e_ie_{i-r}.$$

为证明式(12), 只需证

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_{ai} \xrightarrow{P} \sigma_e^2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2\Big)I_p, \tag{13}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_{bi} \xrightarrow{P} 0. \tag{14}$$

注意到

$$\varepsilon_{ai} = f_0(1)e_i^2 - (1-L)\tilde{\varepsilon}_{ai},$$

这里:

$$\tilde{\varepsilon}_{ai} = \tilde{f}_0(L)e_i^2; \qquad \tilde{f}_0(L) = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{f}_{0k}L^k, \qquad \tilde{f}_{0k} = \sum_{s=k+1}^{\infty}f_{0s} = \sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2.$$

从而有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\varepsilon_{ai} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}f_0(1)e_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}(1-L)\tilde{\varepsilon}_{ai},$$

故有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}f_0(1)e_i^2 \to \sigma_e^2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2\Big)I_p \text{ a. s.}$$

应用 Abel 不等式, 可以证明

$$\Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}(1-L)\tilde{\varepsilon}_{ai}\Big)_{hl}\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2})_{hl}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2e_{i-k}^2\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2e_{i-k-1}^2\Big)\Big]\Big| \leqslant$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant h,l\leqslant n}|(\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2})_{hl}|\frac{1}{n}\Big(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2e_{m-k}^2\Big) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2e_{-k}^2\Big),$$

对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 用 A_{hl} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 h 行、第 l 列元素($h,l=1,2,\cdots,p$).

下面证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2e_{-k}^2 \xrightarrow{P} 0, \tag{15}$$
$$\frac{1}{n}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2e_{m-k}^2\Big) \xrightarrow{P} 0. \tag{16}$$

若

$$E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2 e_{-k}^2\Big) = \sigma_e^2\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2\Big) < +\infty,$$

则式(15)成立. 而由假设(H_4)中(i)可知式(15)成立.

式(16)等价于对 $\forall c>0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2 e_{m-k}^2\Big) I\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2 e_{m-k}^2 > nc\Big) \xrightarrow{P} 0. \tag{17}$$

若

$$E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2 e_{m-k}^2\Big) I\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2 e_{m-k}^2 > nc\Big) \to 0,$$

则式(17)成立; 若

$$E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s^2 e_{-k}^2\Big) < +\infty,$$

则式(16)成立, 从而式(13)成立.

由文献[8], 有

$$\varepsilon_{bi} = e_i e_{i-1}^{f} - (1-L)\tilde{\varepsilon}_{bi},$$

这里:

$$e_{i-1}^{f} = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(1) e_{i-r} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\phi_s\phi_{s+r}e_{i-r} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{i-j} \triangleq \sum_{j=1}^{\infty}\hat{r}_j e_{i-j},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{bi} = \sum_{r=1}^{\infty}\tilde{f}_r(L)e_i e_{i-r} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+r}L^k e_i e_{i-r} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{i-k}e_{i-k-j}.$$

令 $\sigma_f^2 = E(e_{t-1}^{f})^2 = \sigma_e^2\sum_{j=1}^{\infty}\hat{r}_j^2$, 则由文献[8]中引理 3.6(b), 可得 $\sigma_f^2 < +\infty$.

由 $E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}e_i e_{i-1}^{f}\Big) = 0_{p\times p}$ 及 $\sigma_f^2 < +\infty$, 可知

$$\Big\|E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}e_i e_{i-1}^{f}\Big)^2\Big\| \leqslant \frac{1}{n}\|\tilde{\boldsymbol{V}}_n\|^{-2}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\tilde{\boldsymbol{x}}_i\|^2\sigma_e^2\sigma_f^2 = o(1),$$

从而有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}e_i e_{i-1}^{f} \xrightarrow{P} 0_{p\times p}.$$

注意到

$$\Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}(1-L)\tilde{\varepsilon}_{bt}\Big)_{hl}\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2})_{hl}(1-L)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{i-k}e_{i-k-j}\Big| =$$

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2})_{hl}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{i-k}e_{i-k-j} - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{i-k-1}e_{i-j-k-1}\Big)\Big| \leqslant$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant h,l\leqslant n}|(\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2})_{hl}| \times$$

$$\frac{1}{n}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{-k}e_{-k-j}\Big| + \max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{m-k}e_{m-k-j}\Big|\Big).$$

为证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_n^{-1/2}(1-L)\tilde{\varepsilon}_{bt} \xrightarrow{P} 0_{p\times p}, \tag{18}$$

只需证

$$\frac{1}{n}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{-k}e_{-k-j}\Big| \xrightarrow{P} 0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{n}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{m-k}e_{m-k-j}\Big| \xrightarrow{P} 0. \tag{20}$$

若

$$E\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{-k}e_{-k-j}\right|^2 < +\infty,$$

则式(19)成立. 又由文献[8]中引理5.9知, 若 $Ee_0^4 < +\infty$, $\sum_{j=1}^{\infty}j\phi_j^2 < +\infty$, 则由假设($H_4$)中(i)可知式(19)成立.

式(20)等价于

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{m-k}e_{m-k-j}\right|I\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{m-k}e_{m-k-j}\right|>nc\right)\xrightarrow{P}0, \tag{21}$$

对 $\forall c>0$, 由于

$$E\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{m-k}e_{m-k-j}\right|I\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{m-k}e_{m-k-j}\right|>nc\right)\to 0,$$

从而式(21)成立.

而 $E\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=k+1}^{\infty}\phi_s\phi_{s+j}e_{-k}e_{-k-j}\right| < +\infty$. 式(18)得证.

综上可见, 引理8成立.

下面证明定理1. 由引理5~引理8, 类似于文献[10]中定理1的证明, 有

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i\right)+o_p(1).$$

结合引理6和引理8, 即可证得定理1.

参 考 文 献

[1] Shiller R J. Smoothness Priors and Nonlinear Regression [J]. J Amer Statist Assoc, 1984, 79: 605-615.

[2] Speckman P. Kernel Smoothing in Partial Linear Models [J]. J Royal Statist Soc B, 1988, 50(3): 413-436.

[3] Chen H, Shiau J. A Two-Stage Spline Smoothing Method for Partial Linear Models [J]. J Statist Plann Inference, 1991, 27(2): 187-201.

[4] Donald S G, Newey W K. Series Estimation of Semilinear Models [J]. J Multivariate Anal, 1994, 50(1): 30-40.

[5] Hamilton S A, Truong Y K. Local Linear Estimation in Partial Linear Models [J]. J Multivariate Anal, 1997, 60(1): 1-19.

[6] Härdle W, Liang H, Gao J. Partial Linear Models [M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2000.

[7] Gao J T, Anh V V. Semiparametric Regression under Long-Range Dependent Errors [J]. J Statist Plann Inference, 1999, 80(1/2): 37-57.

[8] Philips P C B, Solo V. Asymptotics for Linear Processes [J]. Ann Statist, 1992, 20(2): 971-1001.

[9] Sun X Q, You J H, Chen G, et al. Convergence Rate of a Class of Estimators in Partially Linear Regression Models with Serially Correlated Errors [J]. Communications Statist: Theory Methods, 2002, 31(12): 2251-2252.

[10] Owen A B. Empirical Likelihood Confidence Regions [J]. Ann Statist, 1990, 18(1): 90-120.

[11] Owen A B. Empirical Likelihood for Linear Models [J]. Ann Statist, 1991, 19(4): 1725-1747.

[12] QIN Jin, Lawless J. Empirical Likelihood and General Estimating Equations [J]. Ann Statist, 1994, 22(1): 300-325.

[13] Kitamura Y. Empirical Likelihood Methods with Weakly Dependent Processes [J]. Ann Statist, 1997, 25(5): 2084-2102.

[14] ZHANG Jun-jian, WANG Cheng-ming, WANG Wei. Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions for Dependent Samples [J]. Appl Math J Chines Univ: Ser A, 1999, 14(1): 63-72. (张军舰, 王成名, 王炜. 相依样本情形时的经验似然比置信区间 [J]. 高校应用数学学报: A辑, 1999, 14(1): 63-72.)