灰色多随从二层线性规划问题及其解法

刘兵兵[1], 郭亚君[2]
(1. 安庆师范学院 数学与计算科学学院, 安徽 安庆 246133;
2. 河北科技师范学院 数学与信息科技学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 针对多随从二层线性规划问题, 结合灰色特征, 提出了灰色独立多随从二层线性规划问题. 建立了该问题的数学模型, 并证明了漂移型灰色独立多随从二层线性规划问题等价于漂移型灰色二层线性规划问题. 对于漂移型灰色独立多随从二层线性规划问题, 基于单纯形法设计了一种求解算法. 数值算例表明该算法是可行有效的.

关键词: 二层线性规划; 灰色理论; 独立多随从; 单纯形方法
中图分类号: O221.1; N941.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)04-0625-08

A Grey Linear Bilevel Programming Problem with Multiple Independent Followers and Its Algorithm

LIU Bing-bing[1], GUO Ya-jun[2]
(1. *School of Mathematics and Computing Science*, *Anqing Teachers College*, *Anqing* 246133, *Anhui Province*, *China*;
2. *School of Mathematics & Information Technology*, *Hebei Normal University of Science & Technology*, *Qinhuangdao* 066004, *Hebei Province*, *China*)

Abstract: Based on the linear bilevel programming problem with multiple independent followers and the characteristic of grey system, a grey linear bilevel programming problem with multiple independent followers (GLBMIF) was put forward, and its model was given. We showed that the drifting grey linear bilevel programming problem with multiple independent followers (GLBMIF(θ)) is equivalent to the drifting grey linear bilevel programming problem. An algorithm based on simplex method was developed to solve the GLBMIF (θ). A numerical example shows that the proposed algorithm is feasible and effective.

Key words: linear bilevel programming; grey system; multiple independent followers; simplex method

二层规划问题是多层规划问题中最基本、最典型的模型之一. 在多层规划应用中, 也以二层规划的应用常见. 在二层规划问题中, 下层服从上层, 各层决策者都有自己的目标函数和决策变量, 上层决策者首先宣布自己的决策给下层, 在此基础上, 下层再根据自己的目标做出反应, 上层再根据下层的反应去优化自己的目标函数. 实际问题中, 有很多决策系统可以视为二层决策问题. 如资源分配问题、价格控制问题等. 将二层规划模型与灰色理论[1]相结合, 目前已得到了有广泛应用背景的灰色二层规划模型[2]. 徐斌等[3]提出了灰色离散双层漂移型线性规划问题, 并设计了一种交互式补偿模糊算法. 张恩路等[4]首次定义了灰色二层线性规划模型, 并借助KKT最优性条件将该模型转化为等价的单层规划问题, 最后利用所设计的算法进行了数值验证. 文献[5-6]提出了独立多随从二层线性规划模型, 该模型有如下特点: 有若干个(至少为两个)平行的下层问题, 且每个下层问题仅包含上层决策变量和自己的决策变量, 即下层各问题之间并无交流沟通, 不会共享任何信息. 本文将独立多随从二层

收稿日期: 2010-08-27.
作者简介: 刘兵兵(1980—), 男, 汉族, 硕士, 讲师, 从事二层规划理论与算法的研究, E-mail: lbb122400@gmail.com.
基金项目: 安徽省高校优秀青年人才项目基金(批准号: 2009SQRZ121).

线性规划模型和灰色理论相结合, 提出了灰色独立多随从二层线性规划模型, 并对该模型的求解理论进行了深入研究.

1 独立多随从二层线性规划问题

独立多随从二层线性规划问题的数学模型可表示为

$$\begin{aligned} &\min_{x,y_1,\cdots,y_K} cx + \sum_{i=1}^{K} d_i y_i, \\ &\text{s.t. } Ax + \sum_{i=1}^{K} B_i y_i \leqslant b_0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $y_i(i=1,2,\cdots,K)$求解

$$\begin{aligned} &\min_{y_i} v_i x + w_i y_i, \\ &\text{s.t. } Q_i x + D_i y_i \leqslant b_i, \end{aligned}$$

这里 $x\in R^{n_0}$是上层问题的决策变量, $y_i\in R^{n_i}(i=1,2,\cdots,K)$是下层第 i 个问题的决策变量; $c,v_i\in R^{n_0}$, $d_i,w_i\in R^{n_i}$, $b_0\in R^{m_0}$, $b_i\in R^{m_i}$, $A\in R^{m_0\times n_0}$, $B_i\in R^{m_0\times n_i}$, $Q_i\in R^{m_i\times n_0}$, $D_i\in R^{m_i\times n_i}$, $i=1,2,\cdots,K$. 为方便, 将上述独立多随从二层线性规划问题简记为 LBMIF 问题.

定义 1 集合 $S=\left\{(x,y_1,\cdots,y_k)\mid Ax+\sum_{i=1}^{K}B_i y_i\leqslant b_0,\ Q_i x+D_i y_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,K\right\}$称为LBMIF 问题的约束集.

本文中假设 S 为非空紧集.

定义 2 对于给定的 x, 集合 $S_i(x)=\{y_i\mid D_i y_i\leqslant b_i-Q_i x\}$称为第 i 个随从的可行集.

定义 3 集合 $S(X)=\left\{x\,\middle|\,\exists(y_1,\cdots,y_K),\ Ax+\sum_{i=1}^{K}B_i y_i\leqslant b_0,\ Q_i x+D_i y_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,K\right\}$称为约束集 S 在上层决策空间中的投影.

定义 4 对于 $x\in S(X)$, 集合 $P_i(x)=\arg\min\limits_{y_i}\{v_i x+w_i y_i\mid y_i\in S_i(x)\}$ 称为第 i 个随从的合理反应集.

本文假设对于上层给定的所有决策, 每个下层都有自己的决策空间, 即 $P_i(x)(i=1,2,\cdots,K)$非空. 进一步, 为了保证 LBMIF 问题能够求解, 假设 $P_i(x)(i=1,2,\cdots,K)$为点对点映射.

定义 5 集合 $IR=\{(x,y_1,\cdots,y_K)\mid(x,y_1,\cdots,y_k)\in S,\ y_i\in P_i(x),\ i=1,2,\cdots,K\}$称为上层问题的可行域.

为了保证 LBMIF 问题解的存在, 假设 IR_{LBMIF}非空. 求解 LBMIF 问题一般先将多随从二层线性规划问题转化为只有单个随从的一般二层线性规划问题, 理论上可以证明转化前后的两类问题等价[6], 然后对转化后的一般二层线性规划问题进行求解, 即可得到 LBMIF 问题的解.

2 灰色多随从二层线性规划问题

2.1 模型与定义

定义 6 设$\otimes$为灰参数集, 则灰色多随从二层线性规划问题(GLBMIF)的数学模型可表示为

$$\begin{aligned} &\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} d_i(\otimes) y_i, \\ &\text{s.t. } A(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} B_i(\otimes) y_i \leqslant b_0(\otimes), \end{aligned} \tag{2}$$

其中: $y_i(i=1,2,\cdots,K)$求解

$$\begin{aligned} &\min_{y_i} v_i(\otimes)x + w_i(\otimes)y_i, \\ &\text{s.t. } Q_i(\otimes)x + D_i(\otimes)y_i \leqslant b_i(\otimes), \end{aligned}$$

这里 $x\in R^{n_0}$ 是上层问题的决策变量, $y_i\in R^{n_i}(i=1,2,\cdots,K)$ 是下层第 i 个问题的决策变量; $c(\otimes)=(c_1(\otimes),c_2(\otimes),\cdots,c_{n_0}(\otimes))$, $d_i(\otimes)=(d_1^i(\otimes),d_2^i(\otimes),\cdots,d_{n_i}^i(\otimes))$, $A(\otimes)=(a_{lp}(\otimes))_{m_0n_0}$, $B_i(\otimes)=(b_{lj}^i(\otimes))_{m_0n_i}$, $b_0(\otimes)=(b_1^0(\otimes),b_2^0(\otimes),\cdots,b_{m_0}^0(\otimes))$, $v_i(\otimes)=(v_1^i(\otimes),v_2^i(\otimes),\cdots,v_{n_0}^i(\otimes))$, $w_i(\otimes)=(w_1^i(\otimes),w_2^i(\otimes),\cdots,w_{n_i}^i(\otimes))$, $Q_i(\otimes)=(q_{sp}^i(\otimes))_{m_in_0}$, $D_i(\otimes)=(d_{sj}^i(\otimes))_{m_in_i}$, $b_i(\otimes)=(b_1^i(\otimes),b_2^i(\otimes),\cdots,b_{m_i}^i(\otimes))$, $c^p(\otimes)\in[\underline{c}_p,\bar{c}_p]$, $d_j^i(\otimes)\in[\underline{d}_j^i,\bar{d}_j^i]$, $a_{lp}(\otimes)\in[\underline{a}_{lp},\bar{a}_{lp}]$, $b_{lj}^i(\otimes)\in[\underline{b}_{lj}^i,\bar{b}_{lj}^i]$, $b_l^0(\otimes)\in[\underline{b}_l^0,\bar{b}_l^0]$, $v_p^i(\otimes)\in[\underline{v}_p^i,\bar{v}_p^i]$, $w_j^i(\otimes)\in[\underline{w}_j^i,\bar{w}_j^i]$, $q_{sp}^i(\otimes)\in[\underline{q}_{sp}^i,\bar{q}_{sp}^i]$, $d_{sj}^i(\otimes)\in[\underline{d}_{sj}^i,\bar{d}_{sj}^i]$, $b_s^i(\otimes)\in[\underline{b}_s^i,\bar{b}_s^i]$; $i=1,2,\cdots,K$, $p=1,2,\cdots,n_0$, $j=1,2,\cdots,n_i$, $l=1,2,\cdots,m_0$, $s=1,2,\cdots,m_i$.

为方便, 下面给出 GLBMIF 问题的相关定义.

定义 7　集合

$$S_G=\left\{(x,y_1,\cdots,y_k)\,|\,A(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}B_i(\otimes)y_i\leqslant b_0(\otimes),\ Q_i(\otimes)x+D_i(\otimes)y_i\leqslant b_i(\otimes),\ i=1,2,\cdots,K\right\}$$

称为 GLBMIF 问题的约束集.

本文中假设 S_G 为非空紧集.

定义 8　对给定的 x, $S_{Gi}(x)=\{y_i\,|\,D_i(\otimes)y_i\leqslant b_i(\otimes)-Q_i(\otimes)x\}$ 称为第 i 个随从的可行集.

定义 9　集合

$$S_G(X)=\left\{x\,|\,\exists(y_1,\cdots,y_K),\ A(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}B_i(\otimes)y_i\leqslant b_0,\ Q_ix+D_i(\otimes)y_i\leqslant b_i(\otimes),\ i=1,2,\cdots,K\right\}$$

称为约束集 S_G 在上层决策空间中的投影.

定义 10　对于 $x\in S_G(X)$, 集合 $P_{Gi}(x)=\arg\min\limits_{y_i}\{v_i(\otimes)x+w_i(\otimes)y_i\,|\,y_i\in S_{Gi}(x)\}$ 称为第 i 个随从的合理反应集.

本文假设对于上层给定的所有决策, 每个下层都有自己的决策空间, 即 $P_{Gi}(x)(i=1,2,\cdots,K)$ 非空. 进一步, 为了保证 GLBMIF 问题能够求解, 假设 $P_{Gi}(x)(i=1,2,\cdots,K)$ 为点对点映射.

定义 11　集合 $IR_G=\{(x,y_1,\cdots,y_K)\,|\,(x,y_1\cdots,y_K)\in S_G,\ y_i\in P_{Gi}(x),\ i=1,2,\cdots,K\}$ 称为上层问题的可行域.

为了保证 GLBMIF 问题解的存在, 假设 IR_G 非空. 于是, 问题(2)可以等价表达为

$$\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}d_i(\otimes)y_i,$$
$$\text{s.t.}\ (x,y_1,\cdots,y_K)\in IR_G.$$

定义 12　设 $\sigma_p,\varepsilon_j,\alpha_{lp},\beta_{lj},\delta_l,\gamma_p,\eta_j,\lambda_{sp},\mu_{sj},\xi_s\in[0,1]$ 为模型的白化系数, 令灰色参数的白化值分别为

$$\tilde{c}_p(\otimes)=\underline{c}_p+\sigma_p(\bar{c}_p-\underline{c}_p),\quad \tilde{d}_j^i(\otimes)=\underline{d}_j^i+\varepsilon_j(\bar{d}_j^i-\underline{d}_j^i),\quad \tilde{a}_{lp}(\otimes)=\underline{a}_{lp}+\alpha_{lp}(\bar{a}_{lp}-\underline{a}_{lp}),$$
$$\tilde{b}_{lj}^i(\otimes)=\underline{b}_{lj}^i+\beta_{lj}(\bar{b}_{lj}^i-\underline{b}_{lj}^i),\quad \tilde{b}_l^0(\otimes)=\underline{b}_l^0+\delta_l(\bar{b}_l^0-\underline{b}_l^0),\quad \tilde{v}_p^i(\otimes)=\underline{v}_p^i+\gamma_p(\bar{v}_p^i-\underline{v}_p^i),$$
$$\tilde{w}_j^i(\otimes)=\underline{w}_j^i+\eta_j(\bar{w}_j^i-\underline{w}_j^i),\qquad \tilde{q}_{sp}^i(\otimes)=\underline{q}_{sp}^i+\lambda_{sp}(\bar{q}_{sp}^i-\underline{q}_{sp}^i),$$
$$\tilde{d}_{sj}^i(\otimes)=\underline{d}_{sj}^i+\mu_{sj}(\bar{d}_{sj}^i-\underline{d}_{sj}^i),\qquad \tilde{b}_s^i(\otimes)=\underline{b}_s^i+\xi_s(\bar{b}_s^i-\underline{b}_s^i),$$

其中: $i=1,2,\cdots,K$; $p=1,2,\cdots,n_0$; $j=1,2,\cdots,n_i$; $l=1,2,\cdots,m_0$; $s=1,2,\cdots,m_i$.

则有如下规划问题

$$\begin{aligned}&\min_{x,y_1,\cdots,y_K}\tilde{c}(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}\tilde{d}_i(\otimes)y_i,\\&\text{s.t.}\ \tilde{A}(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}\tilde{B}_i(\otimes)y_i\leqslant\tilde{b}_0(\otimes),\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $y_i(i=1,2,\cdots,K)$ 求解

$$\min_{y_i} \tilde{v}_i(\otimes)x + \tilde{w}_i(\otimes)y_i,$$
$$\text{s.t. } \widetilde{Q}_i(\otimes)x + \widetilde{D}_i(\otimes)y_i \leqslant \tilde{b}_i(\otimes),$$

问题(3)称为 GLBMIF 的定位规划.

定义 13 设对 $\forall i=1,2,\cdots,K$; $p=1,2,\cdots,n_0$; $j=1,2,\cdots,n_i$; $l=1,2,\cdots,m_0$ 和 $s=1,2,\cdots,m_i$, 有

$$\sigma_p = \sigma,\quad \varepsilon_j = \varepsilon,\quad \alpha_{lp} = \alpha,\quad \beta_{lj} = \beta,\quad \delta_l = \delta,\quad \gamma_p = \gamma,$$
$$\eta_j = \eta,\quad \lambda_{sp} = \lambda,\quad \mu_{sj} = \mu,\quad \xi_s = \xi,$$

则相应的定位规划称为$(\sigma,\varepsilon,\alpha,\beta,\delta,\gamma,\eta,\lambda,\mu,\xi)$定位规划问题. 本质为一般的独立多随从二层线性规划问题, 记为 LBMIF$(\sigma,\varepsilon,\alpha,\beta,\delta,\gamma,\eta,\lambda,\mu,\xi)$, 其约束集记为 $S_G(\alpha,\beta,\delta,\lambda,\mu,\xi)$, 可行域记为 $IR_G(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\eta,\lambda,\mu,\xi)$.

2.2 漂移型灰色多随从二层线性规划问题

2.2.1 基本概念

定义 14 令 $\sigma=\varepsilon=\alpha=\beta=\delta=\gamma=\eta=\lambda=\mu=\xi=\theta$, 此时对应的定位规划成为 GLBMIF 的 θ 的定位规划, 记为 LBMIF(θ), 称为漂移型灰色多随从二层线性规划问题. 其模型可表示为

$$\begin{aligned}&\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c_\theta(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} d_{i\theta}(\otimes)y_i,\\ &\text{s.t. } A_\theta(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} B_{i\theta}(\otimes)y_i \leqslant b_{0\theta}(\otimes),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $y_i(i=1,2,\cdots,K)$求解

$$\min_{y_i} v_{i\theta}(\otimes)x + w_{i\theta}(\otimes)y_i,$$
$$\text{s.t. } Q_{i\theta}(\otimes)x + D_{i\theta}(\otimes)y_i \leqslant b_{i\theta}(\otimes),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

令其约束集和可行域分别记为 $S_G(\theta)$和 $IR_G(\theta)$, $S_{G\theta}(X)$称为约束集 $S_G(\theta)$在上层决策空间中的投影.

为保证 LBMIF(θ)有解, 假设 $S_G(\theta)$为非空紧集, $\forall x\in S_{G\theta}(X)$; 下层各问题的合理反应集 $P_{G\theta i}(x)$ $(i=1,2,\cdots,K)$非空, 且为点对点映射. 于是, 问题(4)可等价表达为如下问题(记为 A 问题):

$$\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c_\theta(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} d_{i\theta}(\otimes)y_i,$$
$$\text{s.t. } (x,y_1,\cdots,y_K) \in IR_G(\theta),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

2.2.2 LBMIF(θ)的等价问题与求解算法

考虑如下二层规划问题:

$$\begin{aligned}&\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c_\theta(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} d_{i\theta}(\otimes)y_i,\\ &\text{s.t. } A_\theta(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} B_{i\theta}(\otimes)y_i \leqslant b_{0\theta}(\otimes),\end{aligned} \tag{5}$$

其中$(y_1,y_2,\cdots,y_K)$求解

$$\min_{y_1,\cdots,y_K} \sum_{i=1}^{K} (v_{i\theta}(\otimes)x + w_{i\theta}(\otimes)y_i),$$
$$\text{s.t. } Q_{i\theta}(\otimes)x + D_{i\theta}(\otimes)y_i \leqslant b_{i\theta}(\otimes),\quad i = 1,2,\cdots,K,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

记该问题为 LBP(θ), 其约束集记为 $\widetilde{S}_G(\theta)$, 易见 $\widetilde{S}_G(\theta)=S_G(\theta)$. 对于给定的 x, 集合

$$\widetilde{S}_{G\theta}(x) = \{(y_1,\cdots,y_K)\,|\,D_{i\theta}(\otimes)y_i \leqslant b_{i\theta}(\otimes) - Q_{i\theta}(\otimes)x,\ i = 1,2,\cdots,K\}$$

称为下层问题的可行集. 设 $P_{G\theta}(x)$表示下层问题的合理反应集, 即

$$P_{G\theta}(x) = \arg\min_{y_1,\cdots,y_K}\Big\{ \sum_{i=1}^{K} (v_{i\theta}(\otimes)x + w_{i\theta}(\otimes)y_i)\,|\,(y_1,\cdots,y_K) \in \widetilde{S}_{G\theta}(x)\Big\}.$$

设 $\widetilde{IR}_G(\theta)$表示 LBP(θ)的可行域, 即

$$\widetilde{IR}_G(\theta) = \{(x,y_1,\cdots,y_K)\,|\,(x,y_1,\cdots,y_K) \in \widetilde{S}_G(\theta),\ (y_1,\cdots,y_K) \in P_{G\theta}(x)\}.$$

则问题(5)可以等价地表示为如下规划问题(记为 B 问题):

$$\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c_\theta(\otimes)x + \sum_{i=1}^{K} d_{i\theta}(\otimes)y_i,$$
$$\text{s.t.}\ (x,y_1,\cdots,y_K) \in \widetilde{IR}_G(\theta),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

定理 1　LBMIF(θ)问题等价于 LBP(θ)问题，即问题 A 等价于问题 B.

证明：观察 LBMIF(θ)问题与 LBP(θ)问题，也即问题 A 与问题 B，由于其(上层)目标函数相同，所以只需证明 $IR_G(\theta) = \widetilde{IR}_G(\theta)$ 即可. 下面采用反证法证明.

设$(\bar{x},\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in IR_G(\theta)$，则有$(\bar{x},\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in S_G(\theta)$，且 $\bar{y}_i \in P_{G\theta i}(x)\,(i=1,2,\cdots,K)$. 固定上层决策变量 $x=\bar{x}$，对 LBP(θ)的下层问题，如果$(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K)$不是该下层问题的最优解，则必存在$(y_1^*,\cdots,y_K^*) \in \widetilde{S}_{G\theta}(x)$，使得

$$\sum_{i=1}^{K}(v_{i\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{i\theta}(\otimes)y_i^*) < \sum_{i=1}^{K}(v_{i\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{i\theta}(\otimes)\bar{y}_i). \tag{6}$$

另一方面，由于$(y_1^*,\cdots,y_K^*) \in \widetilde{S}_{G\theta}(x)$，则有 $y_i^* \in S_{G\theta i}(x)\,(i=1,2,\cdots,K)$，从而有

$$v_{i\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{i\theta}(\otimes)\bar{y}_i \leqslant v_{i\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{i\theta}(\otimes)y_i^*,\qquad i=1,2,\cdots,K,$$

这与式(6)矛盾，所以$(\bar{x},\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in \widetilde{IR}_G(\theta)$.

同理设$(\bar{x},\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in \widetilde{IR}_G(\theta)$，因此有$(\bar{x},\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in \widetilde{S}_G(\theta) = S_G(\theta)$，$(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in \widetilde{S}_{G\theta}(x)$，且 $\bar{y}_i \in S_{G\theta}(x)\,(i=1,2,\cdots,K)$. 如果存在指标 $j \in \{i=1,2,\cdots,K\}$，使得 $\bar{y}_i \notin P_{G\theta j}(x)$，则有

$$v_{j\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{j\theta}(\otimes)y_j^* < v_{j\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{j\theta}(\otimes)\bar{y}_j, \tag{7}$$

式(7)中 y_j^* 为当固定 $x=\bar{x}$ 时 LBMIF(θ)的第 j 个下层问题的最优解.

另一方面，由于$(\bar{y}_1,\cdots,y_j^*,\cdots,\bar{y}_K) \in \widetilde{S}_{G\theta}(x)$，且$(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K)$为固定 $x=\bar{x}$ 时 LBP(θ)下层问题的最优解，则有

$$\sum_{i=1}^{K}(v_{i\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{i\theta}(\otimes)\bar{y}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{K}(v_{i\theta}(\otimes)\bar{x}) + w_{1\theta}(\otimes)\bar{y}_1 + \cdots + w_{j\theta}(\otimes)y_j^* + \cdots + w_{K\theta}(\otimes)\bar{y}_K,$$

因此可得

$$v_{j\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{j\theta}(\otimes)\bar{y}_j \leqslant v_{j\theta}(\otimes)\bar{x} + w_{j\theta}(\otimes)y_j^*,$$

这与式(7)矛盾. 所以有

$$(\bar{x},\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_K) \in IR_G(\theta).$$

综上，定理 1 得证.

根据定理 1，可以设计求解漂移型灰色多随从二层规划问题(LBMIF(θ))的算法，求解思想如下：对于给定 θ 值的 LBMIF(θ)问题，将其转化为 LBP(θ)问题，由定理 1 可知 LBMIF(θ)与 LBP(θ)等价，通过求解 LBP(θ)可以求出 LBMIF(θ)的最优解. 而 LBP(θ)问题是确定型单随从二层线性规划问题，求解方法较多，如"可信度"方法、k 次最好方法和基于 KKT 条件的方法等. 本文采用基于 KKT 条件的方法求解.

定理 2　对于给定 θ 值的 LBP(θ)问题，当上层给定某个 $x \in \widetilde{S}_G(\theta)$时，$(y_1,y_2,\cdots,y_K)$为下层规划问题最优解的充要条件为：存在 $\lambda_i,\mu_i \geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,K)$，使得$(y_1,y_2,\cdots,y_K)$满足如下约束条件：

$$\begin{cases} w_{i\theta}(\otimes)^{\mathrm{T}} + D_{i\theta}(\otimes)^{\mathrm{T}}\lambda_i - \mu_i = 0, \\ Q_{i\theta}(\otimes)x + D_{i\theta}(\otimes)y_i - b_{i\theta}(\otimes) \leqslant 0, \\ \mu_i^{\mathrm{T}}y_i = 0, \\ \lambda_i(Q_{i\theta}(\otimes)x + D_{i\theta}(\otimes)y_i - b_{i\theta}(\otimes)) = 0, \\ \lambda_i,\mu_i \geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,K, \end{cases} \tag{8}$$

其中：$\lambda_i = (\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{im_i})^{\mathrm{T}}$；$\mu_i = (\mu_{i1},\mu_{i2},\cdots,\mu_{in_i})^{\mathrm{T}}$.

证明过程可仿照文献[4]中的定理 3.

推论 1　对于 LBP(θ)问题，用下层规划的 KKT 条件(8)代替下层规划问题，则 LBP(θ)问题可转化为如下的单层规划问题：

$$\min_{x,y_1,\cdots,y_K} c_\theta(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}d_{i\theta}(\otimes)y_i,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}A_\theta(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}B_{i\theta}(\otimes)y_i\leqslant b_{0\theta}(\otimes),\\ w_{i\theta}(\otimes)^{\mathrm{T}}+D_{i\theta}(\otimes)^{\mathrm{T}}\lambda_i-\mu_i=0,\\ Q_{i\theta}(\otimes)x+D_{i\theta}(\otimes)y_i-b_{i\theta}(\otimes)\leqslant 0,\\ \mu_i^{\mathrm{T}}y_i=0,\\ \lambda_i(Q_{i\theta}(\otimes)x+D_{i\theta}(\otimes)y_i-b_{i\theta}(\otimes))=0,\\ \lambda_i,\mu_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,K.\end{cases}\tag{9}$$

问题 LBP(θ)下层规划对偶问题的可行域 V 是有界的, 即

$$V=\{w_{i\theta}(\otimes)^{\mathrm{T}}+D_{i\theta}(\otimes)^{\mathrm{T}}\lambda_i-\mu_i=0,\ \lambda_i,\mu_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,K\}$$

有界, 至多有有限个顶点. 记 $h_i=(\lambda_i,\mu_i)\,(i=1,2,\cdots,K)$, 并记 $H=(h_1,h_2,\cdots,h_K)$, 利用线性规划方法可找到 V 的所有顶点, 记为 $V^E=\{H^1,H^2,\cdots,H^s\}$. 由文献[7]知, 可将上述单层规划问题(9)转化为一系列的有限个线性规划问题 $LP(H^l)\,(l=1,2,\cdots,s)$. 由于 S_G 和 IR_G 非空有界, 故由文献[8]中的命题1可知, $LP(H^l)\,(l=1,2,\cdots,s)$或者存在最优解, 或者不可行. 令 L 表示 $LP(H^l)$存在最优解的指标集, 则有 $L\subseteq\{1,2,\cdots,s\}$. 记$(x^l,y_1^l,\cdots,y_K^l)$表示 $LP(H^l)$的最优解. 如果 $(x^*,y_1^*,\cdots,y_K^*)=\arg\min\left\{c_\theta(\otimes)x^l+\sum_{i=1}^{K}d_{i\theta}(\otimes)y_i^l\,|\,l\in I\right\}$, 则有:

定理3 $(x^*,y_1^*,\cdots,y_K^*)$是 LBMIF(θ)问题(4)的最优解.

由文献[4]中推论1知, 如果 LBP(θ)问题存在可行解, 则其目标函数值一定有界, 且由 θ 值确定. 将 θ 取值视为对区间[0,1]的分割, 分割越稠密, 所得到的目标函数值越接近目标函数的全局最优值, 记 $F_\theta=c_\theta(\otimes)x+\sum_{i=1}^{K}d_{i\theta}(\otimes)y_i$, 令 $\min F=\min\{F_{\theta_1},F_{\theta_2},\cdots,F_{\theta_n}\}$, $\theta_i=\dfrac{i}{n}\,(i=0,1,2,\cdots,n)$. n 的取值可根据结果精度要求确定.

综上, 求解 GLBMIF 问题的算法步骤描述如下:

1) 给定 GLBMIF 问题, 构造关于 θ 的漂移型模型 LBMIF(θ)并转化为 LBP(θ)问题, 再将 LBP(θ)问题转化为单层规划问题, 设定分割数 n, 令 $i=0$, $\min F=+\infty$.

2) 令 $\theta=i/n$, 用线性规划方法求出 V 所有顶点 $V^E=\{H^1,H^2,\cdots,H^s\}$, 并代入单层线性规划问题 $LP(H^l)$, $l=1,2,\cdots,s$.

3) 分别用单纯形方法求解 $LP(H^l)\,(l=1,2,\cdots,s)$, 如果无可行解, 则记最优值为 $\min F_{\theta_i}^l=+\infty$; 否则, 记最优解为$(x_i^l,y_{i1}^l,\cdots,y_{iK}^l)$, 最优值为 $\min F_{\theta_i}^l$.

4) 令 $\min F_{\theta_i}=\min\{\min F_{\theta_i}^l\,|\,l=1,2,\cdots,s\}$, 对应的最优解记为$(x_i^*,y_{i1}^*,\cdots,y_{iK}^*)$, 如果 $\min F_{\theta_i}<\min F$, 令 $\min F=\min F_{\theta_i}$, $(x,y_1,\cdots,y_K)=(x_i^*,y_{i1}^*,\cdots,y_{iK}^*)$; $i=i+1$.

5) 判断 i 是否小于 n. 当 $i<n$ 时, 转2); 当 $i=n$ 时, 输出最优值 $\min F$ 和最优解$(x,y_1,\cdots,y_K)$.

注1 在实际编程中, 算法终止条件 $i=n$ 即使满足, 算法最终输出的目标函数值 $\min F$ 在理论上也不一定完全最优, 有可能是近似全局最优值.

2.3 算例分析

例1

$$\min_x F(x,y_1,y_2,y_3)=c_1(\otimes)x+c_2(\otimes)y_1+c_3(\otimes)y_2+c_4(\otimes)y_3,$$

其中: y_1 求解

$$\min_{y_1} f_1(x,y_1)=c_5(\otimes)x+c_6(\otimes)y_1,$$
$$\text{s.t.}\ a_{11}(\otimes)x+a_{12}(\otimes)y_1\leqslant b_1(\otimes);$$

y_2 求解

$$\min_{y_2} f_1(x,y_2) = c_7(\otimes)x + c_8(\otimes)y_2,$$
$$\text{s.t.}\ \ a_{21}(\otimes)x + a_{22}(\otimes)y_2 \leqslant b_2(\otimes);$$

y_3 求解

$$\min_{y_3} f_1(x,y_3) = c_9(\otimes)x + c_{10}(\otimes)y_3,$$
$$\text{s.t.}\ \ a_{31}(\otimes)x + a_{32}(\otimes)y_3 \leqslant b_3(\otimes),\quad x,y_1,y_2,y_3 \geqslant 0.$$

这里 $c_1(\otimes)\in[-1.5,-0.5]$，$c_2(\otimes)\in[-1.5,-0.5]$，$c_3(\otimes)\in[-3,-1]$，$c_4(\otimes)\in[-1.5,-0.5]$，$c_5(\otimes)\in[-1.5,-0.5]$，$c_6(\otimes)\in[-4,-2]$，$c_7(\otimes)\in[-1.5,-0.5]$，$c_8(\otimes)\in[-4,-2]$，$c_9(\otimes)\in[-1.5,-0.5]$，$c_{10}(\otimes)\in[-4,-2]$，$a_{11}(\otimes)\in[2.5,3.5]$，$a_{12}(\otimes)\in[2,4]$，$a_{21}(\otimes)\in[1,3]$，$a_{22}(\otimes)\in[0.5,1.5]$，$a_{31}(\otimes)\in[0.5,1.5]$，$a_{32}(\otimes)\in[0.5,1.5]$，$b_1(\otimes)\in[28,32]$，$b_2(\otimes)\in[16,20]$，$b_3(\otimes)\in[16,18]$.

解：构造漂移型灰色模型：

$$\tilde{c}_1(\otimes) = -1.5+\theta,\quad \tilde{c}_2(\otimes) = -1.5+\theta,\quad \tilde{c}_3(\otimes) = -3+2\theta,$$
$$\tilde{c}_4(\otimes) = -1.5+\theta,\quad \tilde{c}_5(\otimes) = -1.5+\theta,\quad \tilde{c}_6(\otimes) = -4+2\theta,$$
$$\tilde{c}_7(\otimes) = -1.5+\theta,\quad \tilde{c}_8(\otimes) = -4+2\theta,\quad \tilde{c}_9(\otimes) = -1.5+\theta,$$
$$\tilde{c}_{10}(\otimes) = -4+2\theta,\quad \tilde{a}_{11}(\otimes) = 2.5+\theta,\quad \tilde{a}_{12}(\otimes) = 2+2\theta,$$
$$\tilde{a}_{21}(\otimes) = 1+2\theta,\quad \tilde{a}_{22}(\otimes) = 0.5+\theta,\quad \tilde{a}_{31}(\otimes) = 0.5+\theta,\quad \tilde{a}_{32}(\otimes) = 0.5+\theta,$$
$$\tilde{b}_1(\otimes) = 28+4\theta,\quad \tilde{b}_2(\otimes) = 16+4\theta,\quad \tilde{b}_3(\otimes) = 16+2\theta.$$

将漂移型灰色模型代入例 1 中，化为等价的漂移型灰色单随从二层规划模型为

$$\min_x F(x,y_1,y_2,y_3) = (-1.5+\theta)x + (-1.5+\theta)y_1 + (-3+2\theta)y_2 + (-1.5+\theta)y_3,$$

其中(y_1,y_2,y_3)求解

$$\min_{y_1,y_2,y_3} f(x,y_1,y_2,y_3) = (-4.5+3\theta)x + (-4+2\theta)(y_1+y_2+y_3),$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}(2.5+\theta)x + (2+2\theta)y_1 \leqslant 28+4\theta,\\ (1+2\theta)x + (0.5+\theta)y_2 \leqslant 16+4\theta,\\ (0.5+\theta)x + (0.5+\theta)y_3 \leqslant 16+2\theta,\\ x,y_1,y_2,y_3 \geqslant 0.\end{cases} \tag{10}$$

进一步，将问题(10)化为等价的单层规划模型

$$\min_x F(x,y_1,y_2,y_3) = (-1.5+\theta)x + (-1.5+\theta)y_1 + (-3+2\theta)y_2 + (-1.5+\theta)y_3,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}(2.5+\theta)x + (2+2\theta)y_1 \leqslant 28+4\theta,\\ (1+2\theta)x + (0.5+\theta)y_2 \leqslant 16+4\theta,\\ (0.5+\theta)x + (0.5+\theta)y_3 \leqslant 16+2\theta,\\ x,y_1,y_2,y_3 \geqslant 0;\\ (2+2\theta)\lambda_1 - \mu_1 = 4-2\theta,\\ (0.5+\theta)\lambda_2 - \mu_2 = 4-2\theta,\\ (0.5+\theta)\lambda_3 - \mu_3 = 4-2\theta,\\ \lambda_1((2.5+\theta)x + (2+2\theta)y_1 - 28 - 4\theta) = 0,\\ \lambda_2((1+2\theta)x + (0.5+\theta)y_2 - 16 - 4\theta) = 0,\\ \lambda_3((0.5+\theta)x + (0.5+\theta)y_3 - 16 - 2\theta) = 0,\\ \mu_1 y_1 = 0,\quad \mu_2 y_2 = 0,\quad \mu_3 y_3 = 0,\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3 \geqslant 0.\end{cases}$$

令 $n=200$，在 Matlab7.01 环境中编写程序并运行得到：

$$\theta = 0,$$
$$(x, y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} = (0, 14, 32, 32)^{\mathrm{T}},$$
$$\min F = -165.$$

灰色系数 θ 与目标函数最优值间的近似关系如图1所示.

综上, 本文建立了灰色独立多随从二层线性规划模型, 并证明了该模型等价于一个单随从二层规划模型, 为了设计该模型的求解算法, 进一步把单随从二层规划模型化为单层规划问题, 给出了一些相关结论和算法, 克服了灰色特性带来的求解难度, 最后用一个算例验证了所提算法的有效性.

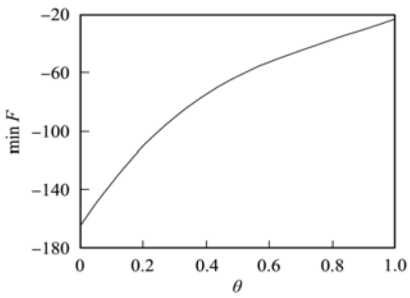

图1 灰色系数与上层目标函数最优值的近似关系

Fig. 1 Approximate relationship between gray coefficient and optimal value of the upper objective function

参 考 文 献

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] WAN Zhong-ping, XIAO Chang-yu, WANG Xian-jia, et al. Bilevel Programming Model of Optional Bidding Strategies under the Uncertain Electricity Markets[J]. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(19): 12-15. (万仲平, 肖昌育, 王先甲, 等. 不确定市场下的一种二层规划最优竞价模型[J]. 电力系统自动化, 2004, 28(19): 12-15.)

[3] XU Bin, LI Nan, BAI Fang. An Interactive Compensatory Fuzzy Algorithm for Grey Decentralized Bilevel Drift-Type Linear Programming Model[J]. Systems Engineering, 2007, 25(11): 91-96. (徐斌, 李南, 白芳. 灰色离散双层漂移型线性规划模型及其交互式补偿模糊算法[J]. 系统工程, 2007, 25(11): 91-96.)

[4] ZHANG En-lu, MENG Xian-yun, LI Zhi-hui, et al. Problem of Grey Bilevel Linear Programming and Its Algorithm[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2009, 29(6): 132-138. (张恩路, 孟宪云, 李智慧, 等. 灰色二层线性规划问题及其解法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 132-138.)

[5] SHI Cheng-gen, ZHANG Guang-quan, LU Jie. The *k*th-Best Approach for Linear Bilevel Multi-follower Programming[J]. J Global Optimization, 2005, 33(4): 563-578.

[6] Calvete H I, Galé C. Linear Bilevel Multi-follower Programming with Independent Followers[J]. J Global Optimization, 2007, 39(3): 409-417.

[7] ZHAO Mao-xian, GAO Zi-you. A Cutting Plane Algorithm for Solving Linear Bilevel Programs[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2005, 29(3): 65-69. (赵茂先, 高自友. 求解线性双层规划的割平面算法[J]. 北京交通大学学报, 2005, 29(3): 65-69.)

[8] LÜ Yi-bing, HU Tie-song, WAN Zhong-ping, et al. A Globally Convergent Method for Solving the Linear Bilevel Programming Problem[J/OL]. Sciencepaper Online of China, [2010-07-25]. http://www.paper.edu.cn/index.php/default/releasepaper/downPaper/200603-87. (吕一兵, 胡铁松, 万仲平, 等. 求解线性二层规划的一种全局优化算法[J/OL]. 中国科技论文在线, [2010-07-25]. http://www.paper.edu.cn/index.php/default/releasepaper/downPaper/200603-87.)