第49卷 第1期 吉林大学学报(理学版) Vol. 49 No. 1
2011年1月 Journal of Jilin University (Science Edition) Jan 2011

研究简报

图 $K_r^c \vee K_s$ 的邻点可区别全色数

陈祥恩，马彦荣
(西北师范大学 数学与信息科学学院，兰州 730070)

摘要：利用组合分析方法研究 r 阶空图与 s 阶完全图的联图 $K_r^c \vee K_s$ 的邻点可区别全色数问题，得到了当 $r+s$ 为奇数且 $s>r^2+2r-1$ 时，$\chi_{\mathrm{at}}(K_r^c \vee K_s)=r+s+2$，其中 $\chi_{\mathrm{at}}(G)$ 表示图 G 的邻点可区别全色数.

关键词：邻点可区别全染色；邻点可区别全色数；联图
中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2011)01-0068-03

Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Chromatic Number of $K_r^c \vee K_s$

CHEN Xiang-en, MA Yan-rong
(*College of Mathematics and Information Science*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number of $K_r^c \vee K_s$, the join of empty graph of order r and complete graph of order s, was discussed via the method of combinatory analysis. One important result $\chi_{\mathrm{at}}(K_r^c \vee K_s)=r+s+2$ holds when $r+s$ is an odd number and $s>r^2+2r-1$, where $\chi_{\mathrm{at}}(G)$ represents the adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number.

Key words: adjacent-vertex-distinguishing total coloring; adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number; join of graphs

图染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数[1-4]. 张忠辅等[5]提出了邻点可区别全染色的概念，研究了圈、完全图、完全二部图、星、扇、轮和树的邻点可区别全染色，得到了相应图的邻点可区别全色数，并提出了一个邻点可区别全染色猜想.

定义1[5] 设 G 是阶数至少为2的连通图，k 是正整数，f 是从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个映射，对任意 $u\in V(G)$，记 $C_f(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)\mid uv\in E(G),\ v\in V(G)\}$ 和 $\overline{C}_f(u)=\{1,2,\cdots,k\}-C(u)$. 如果：

1) 对任意 $uv\in E(G)$，有 $C_f(u)\neq C_f(v)$；

2) 对任意 $uv\in E(G)$，有 $f(u)\neq f(v)$，$f(u)\neq f(uv)\neq f(v)$；

3) 对任意 $uv,vw\in E(G)\ (u\neq w)$，$f(uv)\neq f(vw)$.

则称 f 为 G 的 k-邻点可区别全染色，简记为 k-AVDTC. $C_f(u)$ 称为点 u 的色集合. 数 $\min\{k\mid G\text{存在 }k\text{-AVDTC}\}$ 称为 G 的邻点可区别全色数，记为 $\chi_{\mathrm{at}}(G)$.

猜想1[5] 对简单图 G，有 $\chi_{\mathrm{at}}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

文献[6]讨论了奇数阶完全图删去两条相邻边后得到的图的邻点可区别全色数. 本文讨论图 $K_r^c \vee K_s$ 的邻点可区别全色数. 关于图的邻点可区别全色数的其他结果可参见文献[7-9].

图 $K_r^c \vee K_s$ 是指顶点集合与边集合分别为 $V(K_r^c \vee K_s)=\{u_1,\cdots,u_r,w_1,\cdots,w_s\}$ 和

收稿日期：2010-01-04.
作者简介：陈祥恩(1965—)，男，汉族，硕士，教授，从事图的染色理论及代数理论的研究，E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：10771091)和甘肃省教育厅科研基金(批准号：0501-02).

$E(K_r^c \vee K_s) = \{w_i u_j \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r\} \cup \{w_i w_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant s\}$ 的图.

引理 1[5]　当 G 中没有相邻的最大度顶点时，$\chi_{\mathrm{at}}(G) \geqslant \Delta(G) + 1$；当 G 中有 2 个相邻的最大度顶点时，$\chi_{\mathrm{at}}(G) \geqslant \Delta(G) + 2$.

定理 1　当 $r+s$ 为奇数且 $s > r^2 + 2r - 1$ 时，$\chi_{\mathrm{at}}(K_r^c \vee K_s) = r + s + 2$.

证明：由引理 1，显然有 $\chi_{\mathrm{at}}(K_r^c \vee K_s) \geqslant r + s + 1$.

下面分两种情形证明 $K_r^c \vee K_s$ 不存在 $(r+s+1)$-AVDTC.

情形 1. s 为偶数，r 为奇数.

用反证法. 假设 $K_r^c \vee K_s$ 有 $(r+s+1)$-AVDTC. 设 $(r+s+1)$ 种色构成的集合为 C. 在该染色法中，每种色至多染 $(r+s-1)/2$ 条边，并且每种色至少染 $s/2-1$ 条边. 否则，若有某种色 c 至多染了 $s/2-2$ 条边，此时 $\{w_1, \cdots, w_s\}$ 中至少有 4 个顶点的关联边没有染颜色 c，于是存在其中的 3 个顶点，它们的色集合中不含 c，即它们的色集合相等，这与 f 是邻点可区别矛盾.

对 $i = 1, 2, \cdots, (r+3)/2$，设有 q_i 种色，每种色恰好染了 $s/2 - 2 + i$ 条边，则有：

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{(r+1)/2} + q_{(r+3)/2} = r + s + 1; \tag{1}$$

$$\left(\frac{s}{2} - 1\right) q_1 + \frac{s}{2} q_2 + \cdots + \frac{r+s-3}{2} q_{(r+1)/2} + \frac{r+s-1}{2} q_{(r+3)/2} = \frac{1}{2}s^2 + rs - \frac{1}{2}s. \tag{2}$$

其中式(1)两端计数的均为所用颜色的总数，式(2)两端计数的均为 $K_r^c \vee K_s$ 边的总数. 将式(1)和(2)消去 $q_{(r+1)/2}$，得

$$\begin{aligned} q_{(r+3)/2} &= \frac{1}{2}s^2 + rs - \frac{1}{2}s - (r+s+1)\frac{r+s-3}{2} + \frac{r-1}{2}q_1 + \frac{r-3}{2}q_2 + \cdots + 2q_{(r-3)/2} + q_{(r-1)/2} = \\ & \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r^2 + r + \frac{3}{2} + \frac{r-1}{2}q_1 + \frac{r-3}{2}q_2 + \cdots + 2q_{(r-3)/2} + q_{(r-1)/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

因为 $\{w_1, \cdots, w_s, u_1\}$ 是 $s+1$ 阶完全子图，所以至少需要 $s+1$ 种色去染点，从而至多有 r 种色不染点. 在每种色仅染 $(r+s-1)/2$ 条边的 $q_{(r+3)/2}$ 种色中，至少有 $q_{(r+3)/2} - r$ 种色染了点. 设这 $q_{(r+3)/2} - r$ 种色为 $c_1, c_2, \cdots, c_{q_{(r+3)/2}-r}$，它们在每个点的色集合中都出现，所以 $\bigcup_{i=1}^{s} \bar{C}(w_i) \subseteq C \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_{q_{(r+3)/2}-r}\}$，而每个 $|\bar{C}(w_i)| = 1\ (i = 1, 2, \cdots, s)$，且 $\bar{C}(w_1), \cdots, \bar{C}(w_s)$ 互不相同. 故

$$\begin{aligned} s &\leqslant r + s + 1 - (q_{(r+3)/2} - r) = 2r + s + 1 - q_{(r+3)/2} = \\ & 2r + s + 1 - \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r^2 + r + \frac{3}{2} + \frac{r-1}{2}q_1 + \frac{r-3}{2}q_2 + \cdots + 2q_{(r-3)/2} + q_{(r-1)/2}\right) = \\ & \frac{1}{2}r^2 + r + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} - \left(\frac{r-1}{2}q_1 + \frac{r-3}{2}2q_2 + \cdots + 2q_{(r-3)/2} + q_{(r-1)/2}\right), \end{aligned}$$

从而 $\frac{1}{2}r^2 + r - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \geqslant 0$，于是 $s \leqslant r^2 + 2r - 1$，与假设 $s > r^2 + 2r - 1$ 矛盾.

情形 2. s 为奇数，r 为偶数.

假设 $K_r^c \vee K_s$ 有 $(r+s+1)$-AVDTC. 设 $(r+s+1)$ 种色构成的集合为 C. 在此集合中，每种色至多染 $(r+s-1)/2$ 条边，并且每种色至少染 $(s-1)/2$ 条边. 否则，若有某种色 c 至多染了 $(s-3)/2$ 条边，则 $\{w_1, \cdots, w_s\}$ 中至少有 3 个顶点的关联边没有染颜色 c，而 c 最多染了 $\{w_1, \cdots, w_s\}$ 中的一个点，于是存在 $\{w_1, \cdots, w_s\}$ 中的 2 个顶点，它们的色集合中不含 c，即它们的色集合相等，这与 f 是邻点可区别的全染色矛盾.

设有 q_i 种色，每种色恰好染了 $\frac{s-3}{2} + i\left(i = 1, 2, \cdots, \frac{r+2}{2}\right)$ 条边，则有：

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{r/2} + q_{(r+2)/2} = r + s + 1; \tag{4}$$

$$\frac{s-1}{2}q_1 + \frac{s+1}{2}q_2 + \frac{s+3}{2}q_3 + \cdots + \frac{r+s-3}{2}q_{r/2} + \frac{r+s-1}{2}q_{(r+2)/2} = \frac{1}{2}s^2 + rs - \frac{1}{2}s. \tag{5}$$

将式(4)和(5)中消去 $q_{r/2}$，得

$$q_{(r+2)/2}=\frac{1}{2}s^2+rs-\frac{1}{2}s-\frac{r+s-3}{2}(r+s+1)+\frac{r-2}{2}q_1+\frac{r-4}{2}q_2+\cdots+2q_{(r-4)/2}+q_{(r-2)/2}=$$
$$\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}r^2+r+\frac{3}{2}+\frac{r-2}{2}q_1+\frac{r-4}{2}q_2+\cdots+2q_{(r-4)/2}+q_{(r-2)/2}. \tag{6}$$

在此染法中，至少需要 $s+1$ 种色去染点，亦即至多有 r 种色不染点. 在每种色仅染 $(r+s-1)/2$ 条边的 $q_{(r+2)/2}$ 种色中，至少有 $q_{(r+2)/2}-r$ 种色染了点，设这些色为 $c_1,c_2,\cdots,c_{q_{(r+2)/2}-r}$，它们在每个点的色集合中都出现，所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{s}\bar{C}(w_i)\subseteq C\setminus\{c_1,c_2,\cdots,c_{q_{(r+2)/2}-r}\}$. 故

$$s\leqslant r+s+1-(q_{(r+2)/2}-r)=2r+s+1-q_{(r+2)/2}=$$
$$2r+s+1-\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}r^2+r+\frac{3}{2}+\frac{r-2}{2}q_1+\frac{r-4}{2}q_2+\cdots+2q_{(r-4)/2}+q_{(r-2)/2}\right)=$$
$$\frac{1}{2}r^2+r+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}-\left(\frac{r-2}{2}q_1+\frac{r-4}{2}q_2+\cdots+2q_{(r-4)/2}+q_{(r-2)/2}\right),$$

从而 $\frac{1}{2}r^2+r-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\geqslant 0$，于是 $s\leqslant r^2+2r-1$，与假设 $s>r^2+2r-1$ 矛盾.

综合情形1和情形2可知，$K_r^c\vee K_s$ 不存在 $(r+s+1)$-AVDTC，而 $K_r^c\vee K_s$ 存在 $(r+s+2)$-AVDTC，因为一个 n 阶无孤立边且至多有一个孤立点的图的点可区别正常边色数不超过 $n+1$[4]，利用加点加边法[10]，可得 $K_r^c\vee K_s$ 点可区别正常全色数不超过 $r+s+2$，故可用 $r+s+2$ 种色对 $K_r^c\vee K_s$ 进行点可区别、邻点可区别全染色. 证毕.

定理1表明猜想1对于图 $K_r^c\vee K_s$ 当 $r+s$ 为奇数，且 $s>r^2+2r-1$ 时成立.

参 考 文 献

[1] Černý J, Horňák M, Soták R. Observability of a Graph [J]. Math Slovaca, 1996, 46(1): 21-31.

[2] Burris A C, Schelp R H. Vertex-Distinguishing Proper Edge-Coloring [J]. J Graph Theory, 1997, 26(2): 73-82.

[3] Horňák M, Soták R. Observability of Complete Multipartite Graphs with Equipotent Parts [J]. Ars Combin, 1995, 41: 289-301.

[4] Bazgan C, Harkat-Benhamdine A, LI Hao, et al. On the Vertex-Distinguishing Proper Edge Colorings of Graphs [J]. J Combin Theory: Ser B, 1999, 75(2): 288-301.

[5] ZHANG Zhong-fu, CHEN Xiang-en, LI Jing-wen, et al. On Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. Science in China: Mathematics, 2005, 48(3): 289-299.

[6] CHEN Xiang-en. Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Chromtic Numbers on $K_{2n+1}-E(P_3)$ [J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2004, 13(1): 21-29.

[7] CHEN Xiang-en. On the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Numbers of Graphs with $\Delta=3$ [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(17): 4003-4007.

[8] Hulgan J. Concise Proofs for Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(8): 2548-2550.

[9] CHEN Xiang-en, ZHANG Zhong-fu. AVDTC Numbers of Generalized Halin Graphs with Maximum Degree at Least 6 [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 2008, 24(1): 55-58.

[10] ZHANG Zhong-fu, QIU Peng-xiang, XU Bao-gen, et al. Vertex-Distinguishing Total Colorings of Graphs [J]. Ars Combinatoria, 2008, 87(2): 33-45.