云南大学学报（自然科学版），2004，26（1）：47~50　　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

重正化群方程的一种有效数值解法*

张艳阳
（云南大学 物理系非线性复杂系统中心，云南 昆明　650091）

摘要：介绍了重正化群方程的一种有效的数值解法，并与多项式展开的传统解法作了比较.

关键词：重正化群方程；标度普适性；数值解
中图分类号：O 414.2；O 411　　文献标识码：A　　文章编号：0258-7971(2004)01-0047-04

非线性动力学的一个重要成就是重正化群方法的应用[1~5]. 在一维单峰映射的研究中，Feigenbaum[1~3]发现了具有重要意义的重正化群方程

$$g(x) = \alpha g^n(x/\alpha), \tag{1}$$

其中 $g^n(x)$ 表示函数 $g(x)$ 的 n 次复合嵌套. 从这个方程及其线性化方程可以得到一维单峰映射的 2 个普适常数，即标度因子 α 和收敛速率 δ. 它对一维单峰映射的普适性做了很好的解释，将其纳入了一个非常简捷的数学公式.

函数方程(1) 的多项式展开传统解法[2,4,5] 曾用来求解一类特殊的双峰映射的普适常数[6]. 但其运算量却随着展开系数的增加呈几何级数增长，以致于在目前微机的计算能力范围内对于一般的双峰映射很难得到稳定的解.

本文提出一种求解方程(1) 的新方法，运算量不大，并且随着 $g(x)$ 项数的增加可以很快地收敛到稳定的解. 用这种数值方法还首次解出了一般双峰映射的普适常数，从而证实了双峰映射也可以纳入原来的重正化群的理论框架. 下面，我们主要就单峰映射介绍这一数值解法并比较它与传统方法的优点所在.

1　重正化群方程的传统解法

我们就以最经典的单峰映射周期 2 词 RC 对应的重正化群方程[2,5,7]为例来介绍这种有效的数值方法，并比较它与传统方法的收敛情况. 先看传统解法[5,8,9]. 函数方程(1) 的传统解法是将 $g(x)$ 展开为有限项，代入右边，令两边同次幂项系数相等，可得到它们的近似解[2,4,5]. 展开项数越多，这个近似解就越接近准确解. 对于周期 2(即 $n = 2$)，方程(1) 变为

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \tag{2}$$

对于二次方映射来说，

$$g(x) = 1 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \cdots, \tag{3}$$

其中 A_i 为待定系数. 为了具体计算，将 $g(x)$ 截断到某一有限项. 传统方法是将这个 $g(x)$ 代入到(2) 式右端，展开为一个 x 的多项式. 比较两边 x 的同幂次项系数，得到一个关于 α 和展开系数的非线性方程组，用数值解法就可以得到它们的解. 然后增加 $g(x)$ 的展开项数，用类似方法就可以得到关于 α 和更多的待定系数的解. 这样不断增加 $g(x)$ 的展开项数，就可以尽量地趋于(2) 的精确解，从而在一定精度下得到普适常数 α 和普适函数 $g(x)$.

2　重正化群方程的有效数值解法及其与传统解法的比较

新的数值解法不再比较(2) 式两端的同幂次项系数，而是将 $g(x)$ 截断到某一有限项后，代入(2) 式令其在 $x = 0$ 附近某个区间的有限多个确定点上成立. 这个区间只要在级数(2) 的收敛区间内即可. 这些确定点的数目要恰好等于未知数，即 α 和

* 收稿日期：2003-06-02
基金项目："973" 计划非线性科学项目部分资助 (G2000077308).
作者简介：张艳阳(1978-　)，男，云南人，硕士，主要从事一维符号动力学和复杂性方面的研究.

展开系数 A_i 的总数目. 这样我们就为这些未知数构造了一个方程组, 其方程的数目恰好等于未知数的数目. 把这个方程组数值求解出来, 就得到 α 和 $g(x)$ 的近似解. 同样地, 不断增加展开系数, 可以越来越精确地趋于它们的精确解.

在这个具体例子中, Lanford[7] 证明了 $g(x)$ 的级数收敛半径至少是$\sqrt{8}$, 我们可以取计算区间为$[0, 2]$. 一开始, 令

$$g(x) = 1 + A_1 x^2, \tag{4}$$

代入(2) 式, 令其在$[0, 2]$ 均匀分布的 2 个点 $x = 0, 2$ 上成立, 即

$$\begin{cases} g(0) = \alpha g(g(0/\alpha)), \\ g(2) = \alpha g(g(2/\alpha)) \end{cases}$$

2 个方程, 恰好可以解出 2 个未知数 α 和 A_1 来. 下一步, 令

$$g(x) = 1 + A_1 x^2 + A_2 x^4, \tag{5}$$

代入(2) 式, 令其在$[0, 2]$ 均匀分布的 3 个点 $x = 0, 1, 2$ 上成立, 即

$$\begin{cases} g(0) = \alpha g(g(0/\alpha)), \\ g(1) = \alpha g(g(1/\alpha)), \\ g(2) = \alpha g(g(2/\alpha)), \end{cases}$$

就可以解出 α, A_1 和 A_2 来.

这种有效数值方法的优点是运算量不大, 便于用普通的编程语言(如 C+ +)实现. 随着展开项数的增加, 其运算量增长得也远没有传统方法(几乎是几何增长)那么快. 而且这种方法在展开项数相同的条件下, 能比传统方法更快地趋于精确值. 表 1~ 3 就是这 2 种方法在不断增加展开项数过程中, 计算结果的比较. 同样用微机算到 16 项展开系数, 传统方法用时约 1 h, 而新数值方法用时仅约 2 min. 表中还给出了来自 Lanford[7] 的较精确的结果, 作为参考的标准. 从表中可以看出, 新方法的优点是明显的.

表 1 求解单峰映射倍周期分岔的普适标度因子 α: 2 种方法的比较及与精确值 **- 2.502 907 875 095 892 822 283 902 9**[7]的差异

Tab. 1 Solving the scaling factor α of period-doubling bifurcation for unimodal maps: comparison between two methods and the differences with the precise value - 2.502 907 875 095 892 822 283 902 9[7]

最高幂次		传统方法	有效数值解法
2	α	- 2.732 050 807 568 877 293 5	- 2.486 343 764 959 079 665 3
	Δα	- 0.229 142 932 472 984 471 2	0.016 564 110 136 813 157 0
6	α	- 2.478 909 000 334 702 049 4	- 2.506 262 263 009 410 1397
	Δα	0.023 998 874 761 190 772 9	- 0.003 354 387 913 517 317 4
10	α	- 2.503 076 934 463 090 896 8	- 2.502 910 120 296 091 881 6
	Δα	- 0.000 169 059 367 198 074 5	- 0.000 002 245 200 199 059 3
14	α	- 2.502 907 366 224 405 016 2	- 2.502 907 830 739 128 937 7
	Δα	- 0.000 000 508 871 487 806 1	0.000 000 044 356 763 884 6
18	α	- 2.502 907 865 895 909 855 5	- 2.502 907 874 748 735 3676
	Δα	0.000 000 009 199 982 966 8	0.000 000 000 347 157 454 7
22	α	- 2.502 907 875 507 680 575 2	- 2.502 907 875 093 304 514 6
	Δα	- 0.000 000 000 411 787 752 9	0.000 000 000 003 588 307 7
26	α	- 2.502 907 875 090 321 750 6	- 2.502 907 875 095 893 533 8
	Δα	0.000 000 000 005 571 071 7	- 0.000 000 000 000 000 711 5
30	α	- 2.502 907 875 095 913 086 7	- 2.502 907 875 095 892 892 8
	Δα	- 0.000 000 000 000 020 264 4	- 0.000 000 000 000 000 070 5

表 2 求解单峰映射倍周期分岔普适函数 $g(x)$ 的系数 A_1:2 种方法的比较及与精确值 **− 1.527 632 997 036 301 454 035 890 3**[7] 的差异

Tab. 2 Solving the coefficient A_1 of universal function $g(x)$ of period doubling bifurcation for unimodal maps: comparison between two methods and differences with the precise value − 1.527 632 997 036 301 454 035 890 3[7]

最高幂次		传统方法	有效数值解法
2	A_1	− 1.366 025 403 784 438 646 8	− 1.402 196 998 698 793 380 9
	ΔA_1	0.161 607 593 251 862 807 2	0.125 435 998 337 508 073 1
6	A_1	− 1.521 843 447 489 839 787 7	− 1.531 872 436 478 854 086 6
	ΔA_1	0.005 789 549 546 461 666 3	− 0.004 239 439 442 552 632 6
10	A_1	− 1.527 746 514 827 765 806 9	− 1.527 631 953 370 257 466 6
	ΔA_1	− 0.000 113 517 791 464 352 9	0.000 001 043 666 043 987 4
14	A_1	− 1.527 632 522 523 413 738 1	− 1.527 632 897 710 946 455 9
	ΔA_1	0.000 000 474 512 887 715 9	0.000 000 099 325 354 998 1
18	A_1	− 1.527 632 986 224 538 594 6	− 1.527 632 996 400 100 618 1
	ΔA_1	0.000 000 010 811 762 859 4	0.000 000 000 636 200 835 9
22	A_1	− 1.527 632 997 573 408 530 4	− 1.527 632 997 031 843 390 1
	ΔA_1	− 0.000 000 000 537 107 076 4	0.000 000 000 004 458 063 9
26	A_1	− 1.527 632 997 028 381 295 1	− 1.527 632 997 036 302 587 1
	ΔA_1	0.000 000 000 007 920 158 9	− 0.000 000 000 000 001 133 1
30	A_1	− 1.527 632 997 036 332 284 7	− 1.527 632 997 036 301 552 2
	ΔA_1	− 0.000 000 000 000 030 830 7	− 0.000 000 000 000 000 098 2

表 3 求解单峰映射倍周期分岔普适函数 $g(x)$ 的系数 A_2:2 种方法的比较及与精确值 **0.104 815 194 787 303 733 216 742 6**[7] 的差异

Tab. 3 Solving the coefficient A_2 of universal function $g(x)$ of period doubling bifurcation for unimodal maps: comparison between two methods and the differences with the precise value 0.104 815 194 787 303 733 216 742 6[7]

最高幂次		传统方法	有效数值解法
6	A_2	0.072 931 581 234 966 746 6	0.118 478 446 936 083 398 8
	ΔA_2	− 0.031 883 613 552 336 986 7	0.013 663 252 148 779 665 6
10	A_2	0.105 178 752 492 820 700 1	0.104 784 884 275 520 383 5
	ΔA_2	0.000 363 557 705 516 966 9	− 0.000 030 310 511 783 349 7
14	A_2	0.104 813 727 768 067 846 5	0.104 814 813 062 385 271 7
	ΔA_2	− 0.000 001 467 019 235 886 7	− 0.000 000 381 724 918 461 5
18	A_2	0.104 815 158 924 829 983 6	0.104 815 196 231 951 064 4
	ΔA_2	− 0.000 000 035 862 473 749 7	0.000 000 001 444 647 331 2
22	A_2	0.104 815 196 682 567 601 9	0.104 815 194 767 445 919 3
	ΔA_2	0.000 000 001 895 263 868 7	− 0.000 000 000 019 857 813 9
26	A_2	0.104 815 194 757 378 446 7	0.104 815 194 787 309 162 5
	ΔA_2	− 0.000 000 000 029 925 286 5	0.000 000 000 000 005 429 3
30	A_2	0.104 815 194 787 427 711 0	0.104 815 194 787 304 146 7
	ΔA_2	0.000 000 000 000 123 977 8	0.000 000 000 000 000 413 5

由于重正化群方程新解法的应用,可以用重正化群方程组解释一维双峰映射任意多倍周期分岔中表现出来的各种普适常数[10, 11],从而完整地解决双峰映射的重正化群问题[12].

参考文献:

[1] FEIGENBAUM M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations[J]. J Stat Phys, 1978, 19(1): 25—52.

[2] FEIGENBAUM M J. The universal metric properties of nonlinear transformations[J]. J Stat Phys, 1979, 21(6): 669—706.

[3] FEIGENBAUM M J. Universal behavior in nonlinear systems[J]. Physica, 1983, 7D(1): 16—39.

[4] ZENG Wan-zhen, HAO Bai-lin, WANG Guang-rui, et al. Scaling property of period-n-tupling sequences in one-dimensional mappings[J]. Commun Theor Phys, 1984, 3(3): 283—295.

[5] HAO Bai-lin. Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative Systems[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[6] 张艳阳. 双峰映射三倍周期分岔的一组重正化群方程及其解[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2003, 25(2): 126—128.

[7] LANFORD O E. A Computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures[J]. Bull Amer Math Soc, 1982, 6(3): 427—434.

[8] WEELE J P, CAPEL H W, KLUIVING R. Period doubling in maps with a maximum of order z[J]. Physica A, 1987, 145(3): 425—460.

[9] MESTEL B D, OSBALDESTIN A H. Feigenbaum theory for unimodal maps with asymmetric critical point[J]. J Phys A, 1998, 31(14): 3 287—3 296.

[10] PENG Shou-li, ZHANG Xu-sheng, CAO Ke-Fei. Dual star products and metric universality in symbolic dynamics of three letters[J]. Phys Lett A, 1998, 246(1—2): 87—96.

[11] CAO Ke-fei, PENG Shou-li. Complexity of routes to chaos and global regularity of fractal dimensions in bimodal maps[J]. Phys Rev E, 1999, 60(3): 2 745—2 760.

[12] 张艳阳. 双峰映射重正化群方程组的研究[D]. 昆明: 云南大学, 2003.

An effective numerical solution of renormalization group equations

ZHANG Yan-yang

(Center for Nonlinear Complex Systems, Department of Physics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: An effective numerical solution of renormalization group equations is introduced, and compared with the traditional solution of polynomial expansion.

Key words: renormalization group equation; scaling universality; numerical solution