云南大学学报（自然科学版），2004，26（2）：115~118　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

构造多 Agents 影响图的策略相关图*

李　劲，刘惟一
（云南大学 计算机科学系，云南 昆明　650091）

摘要：基于 Bayes_ball 算法，来判定多 Agents 影响图中任意 2 个决策节点是否 S－可达，给出了构造策略相关图的完整算法. 最后给出了算法正确性的证明.

关键词：多 Agent 影响图；S－可达；策略相关图；Bayes－ball
中图分类号：TP 311.132　　文献标识码：A　　文章编号：0258－7971(2004)02－0115－04

多 Agents 影响图(MAIDs)是贝叶斯网[1]和影响图[2]的扩展，它是对博弈[3]进行建模的有力工具. 利用多 Agents 影响图图形结构中蕴含的变量间的独立关系，我们可以将一个博弈分解为几个子博弈，而这种分解对于博弈均衡的求解是很有帮助的. Koller[4]提出用策略相关图来反映决策变量间的独立关系，并给出了利用 MAIDs 的图形结构来判定决策是否独立的图形化准则：S－可达. 但是文中没有给出在 MAIDs 中，决策节点间 S－可达的判定方法.

Shachter[5]给出了一个判定贝叶斯网中节点间是否 d－分离的有效方法：Bayes－ball 算法. 本文将 Shachter 的方法用于 MAIDs 中决策结点间 S－可达的判定，证明 Bayes－ball 算法对于 S－可达的判定是正确的. 基于此判定方法，我们讨论决策节点间的 S－可达性，最终构造出 MAIDs 策略相关图.

1　基本概念

1.1　贝叶斯网与条件独立　为了讨论 S－可达，我们给出贝叶斯网中路径激活的概念. 在此之前，我们先介绍条件独立和贝叶斯网.

定义 1　设 P 是随机变量集上的联合概率分布，X，Y，Z 是 3 个不相交的随机变量子集. 在 P 中，给定 Z 时，X 条件独立于 Y，记作 $P \models I(X;Y \mid Z)$，当且仅当任意 $z \in \mathrm{dom}(Z)$，$p(z) > 0$，对于任意 $x \in \mathrm{dom}(X)$，$y \in \mathrm{dom}(Y)$，我们有：$p(x \mid y, z) = P(x \mid z)$.

利用随机变量间的条件独立关系，我们可以将一个联合概率分布分解为一系列的条件概率的乘积，$P(X_1, \cdots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid Pa(X_i))$. 这样我们可以用图形的方式来表示联合概率分布. 设每一个随机变量 X_i 对应于图中的一个节点，$Pa(X_i)$ 中的每一个节点有指向 X_i 箭头，X_i 有一张条件概率表，来反映 $Pa(X_i)$ 对 X_i 的概率影响. 所得的这个图就是贝叶斯网.

定义 2　一个贝叶斯网可以用三元组 $G = (N, E, P)$. N 是节点集，(N, E) 是一个有向无环图，$N = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，每一个节点代表一个变量，$E$ 是一组有向边的集合，$E = \{\langle X_i, X_j \rangle \mid X_i \neq X_j \wedge X_i, X_j \in N\}$，$P$ 是一组条件概率的集合，$P = P(X_i \mid Pa(X_i))$，其中 $P(X_i \mid Pa(X_i))$ 表示 X_i 的父亲们 $Pa(X_i)$ 对 X_i 的影响.

我们可通过分析贝叶斯网中节点间的路径，来获得节点对应的随机变量间的条件独立关系.

定义 3　设 G 是贝叶斯网，$X_1 - X_2 - \cdots - X_n$ 是 G 中的无向(不考虑边的方向)路径. 令 E 是 G 中的节点子集. 路径 $X_1 - X_2 - \cdots - X_n$ 在给定条件信息 E 情况下是一条激活路径，仅当：

(1) 路径中如果出现 $X_{i-1} \rightarrow X_i \leftarrow X_{i+1}$，则 X_i 或 X_i 的一个后代出现在 E 中.

* 收稿日期：2003－10－28
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60263006)；云南省自然科学基金资助项目(2002F0063M).
作者简介：李　劲(1975－　)，男，云南人，硕士生，主要从事智能信息处理方面的研究.

(2) 路径中没有其他节点出现在 E 中.

在贝叶斯网中, 在给定条件信息 E 的情况下, X 与 Y 之间的所有路径被阻塞, 我们称 X 与 Y 是 d– 分离的. 对于 d– 分离与随机变量间的条件独立关系, 我们有下面的定理.

定理 1[3] 设 $B=(G,P)$ 是贝叶斯网, 其中 G 是贝叶斯网图形结构, P 是贝叶斯网表示的联合概率分布. X, Y 是 G 中的节点集, E 是条件信息节点集, 且 X, $Y \notin E$. 如果给定 E 情况下, X 与 Y d– 分离, 则 $P \models I(X;Y \mid E)$.

1.2 多 Agents 影响图 Koller[1] 定义了多 Agents 影响图. 它包括 3 种类型的节点: 圆形节点表示随机变量; 方形节点表示 Agent 的决策; 菱形节点表示效用函数. 3 种不同含义的边: 指向圆形节点的边表示概率影响; 指向方形节点边的箭尾所连接的节点, 表示 Agent 在决策时知道这些节点的值(决策的条件信息); 指向菱形节点的有向边的箭尾连接着效用函数的变元. 在 MAIDs 中, 每一个决策节点属于指定的 Agent. 效用节点也指明了所属关系. 图 1 给出了一个含 2 个 Agents 的 MAIDs: D_1, D_3 和 U_2 是 Agent1 的决策和效用节点; D_2 和 U_1, U_3 是 Agent2 的决策和效用节点; C_1, C_2 是随机变量.

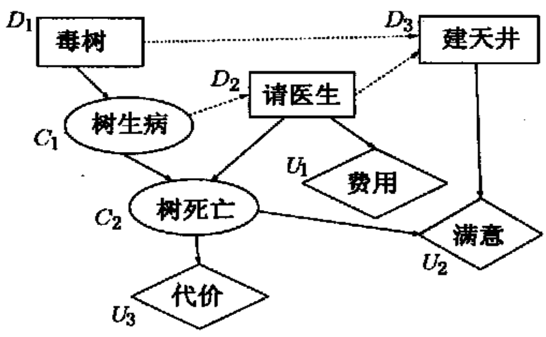

图 1 MAIDs 的例子

Fig. 1 An example of MAIDs

Agent 的每一个决策结点 D_i 对应着一个决策函数 δ_{D_i}. δ_{D_i} 是决策信息到策略空间概率分布的一个映射 $\delta_{D_i}:(Pa(D_i))\alpha P(D_i)$. $Pa(D_i)$ 是图中 D_i 的父亲节点, 表示 Agent 在决策时获得的信息. $P(D_i)$ 是在相应决策信息下 Agent 作出的一个随机策略. MAIDs 中的所有决策节点策略函数确定下来后, 我们就得到 MAIDs 的一个策略剖面, 记为 σ. 获得 σ 后, MAIDs 就退化为一张贝叶斯网.

在多 Agent 决策环境下, Agent 策略的效用不仅取决于自身的策略选择, 有时还取决于其他 Agent 的策略选择. 即各个 Agent 的决策之间存在相关性. 如在图 1 所示的多 Agents 影响图中, Agent1 决定是否下毒时, 必须估计 Agent2 在见到树生病后是否会请医生. 研究这样环境下 Agent 的最优决策, 就必须讨论各个 Agent 决策间的相关性.

1.3 策略相关 下面我们给出决策结点策略相关的定义:

定义 4[1] D_B 是 MAIDs 中决策节点, δ_{D_B} 是 D_B 的决策规则. δ_{D_B} 在策略剖面 σ 下是效用最优的. D_B 独立于 D_A, 当 δ_{D_B} 在任意策略剖面 σ' 下也是最优的, σ 与 σ' 在 D_A 上的决策规则不同.

对于在 MAIDs 中, 什么样的决策节点是策略相关的呢? 文献[1] 中给出了策略相关图形判定准则: S– 可达的定义:

定义 5[1] 在 MAIDs 中, 节点 D_B S– 可达节点 D_A, 如果存在效用节点 $u \in U_{D_A}$, 给节点 D_B 添加一个父亲节点 $\hat{D}_B$, 在给定时 $Pa(D_A)\ Y\{D_A\}$, $\hat{D}_B$ 到 u 有一条激活路径.

我们可以把所有决策节点间的 S– 可达关系表示为一个有向图, 这个图就是策略相关图.

2 构造相关图的算法

2.1 Bayes– ball 算法[3] Bayes– ball 算法是判定贝叶斯网中节点间是否 d– 分离的有效方法. 其基本思想是: 对于条件概率 $P(J \mid K)$, 我们要求出给定条件信息 K 的情况下, 在贝叶斯网中, 与 J d– 分离的节点集. 则方法如下: 对于 $\forall X_i \in J$, 总是假定 X_i 从其孩子处接到 Bayes– ball, 然后 X_i 根据与其相连的边的方向及相连节点的类型, 将球向网中其他节点发送(见图 2, 虚线箭头表示球滚动方向), 并作相应标记. (实线箭头表示贝叶斯网有向边, 空心圆表示随机节点, 实心圆表示条件信息节点, 虚线表示 Bayes– ball 来自的方向及到节点后的传播方向. 如: 右上图表示 Bayes– ball 从孩子"滚向"父亲, 若父亲是随机节点, 则它接到 Bayes– ball 后, 将把球传向其所有的孩子节点(标记"bottom")和父亲节点(标记"top"), 同时标记"visited"). 算法运行结束后, 没有被标记"bottom" 的节点集就是给定条件信息情况下, 与 d– 分离的节点集.

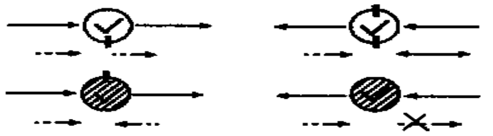

图 2　**Bayes- ball** 的弹回和通过

Fig. 2 The bayes- ball bounces back and passes

利用 Bayes- ball 算法, 我们可得到在给定条件信息情况下, 与指定节点(集) 间存在激活路径(即不 d- 分离) 的节点集.

2.2　构造策略相关图的算法　我们下面给出构造 MAIDs 的策略相关图算法的思想: 根据前面的所述, 当所有 MAIDs 中的决策节点的决策规则确定下来后, MAIDs 可看作是一张贝叶斯网. 在这张贝叶斯网中, 对于一个决策节点 D_i, 我们为网中 $\forall D_j(j \neq i)$ 添加父亲节点 $\hat{D}_j$. 给定一个条件概率 $P(J \mid K)$(其中J 是与决策节点D_i 相关的效用节点集; $K = D_i \cup Pa(D_i)$) 运行 Bayes - ball 算法后, 添加的父亲节点被标记"bottom" 的决策节点, 就是 S- 可达 D_i 的决策节点. 对所有 MAIDs 中的决策节点完成上述过程, 我们就可以得到策略相关图.

构造 MAIDs 的策略相关图算法 Construct - Srgraph:

输入: 多 Agent 影响图 $M = \langle A, X, \Delta, \Psi, E\rangle$. A 是Agent 集, X 是随机节点集, Δ是所有决策节点集, Ψ是效用节点集, E 是有向边集.

输出: M 的策略相关图.

过程: 当决策节点序列$(D_1, D_2, \ldots, D_m)$, $(\forall D_i \in \Delta)$ 不空时做:

(1) 对序列中一个 $D_i \in \Delta$:

① U_{D_i}(设 D_i 是 Agent a 的一个决策节点, 设 U_a 是与Agent a 相关的效用节点集, 则: U_{D_i} 是从 D_i 出发, 顺有向边可"有向到达" U_a 的效用节点集). ②确定$\{D_i, Pa(D_i)\}$($Pa(D_i)$ 是 M 中D_i 的父亲节点集).

(2) 对 M 中任意 $\forall D_j \in \Delta(j \neq i)$, 添加父亲节点 $\hat{D}_j$ 指向D_j, 得到 $\hat{M}_i$.

(3) Bayes - ball(U_{D_i}, $D_i \cup Pa(D_i)$, $\hat{M}_i$).

(4) 遍历 $\forall \hat{D}_k \in \hat{M}_i(j \neq i)$.

(5) if 被 Bayes- ball 标记"bottom" then $D_j \rightarrow D_i$(表示 D_i 策略依赖于D_j).

下面, 我们将在图 1 所示的影响图上运行 Construct- Srgraph 算法, 构造该影响图的策略相关图:

方格的菱形节点表示与当前决策节点相关的效用节点; 斜线的圆形节点表示当前决策节点及条件信息节点; 花纹的圆形节点是我们为 MAIDs 中其他决策节点添加的父亲节点.

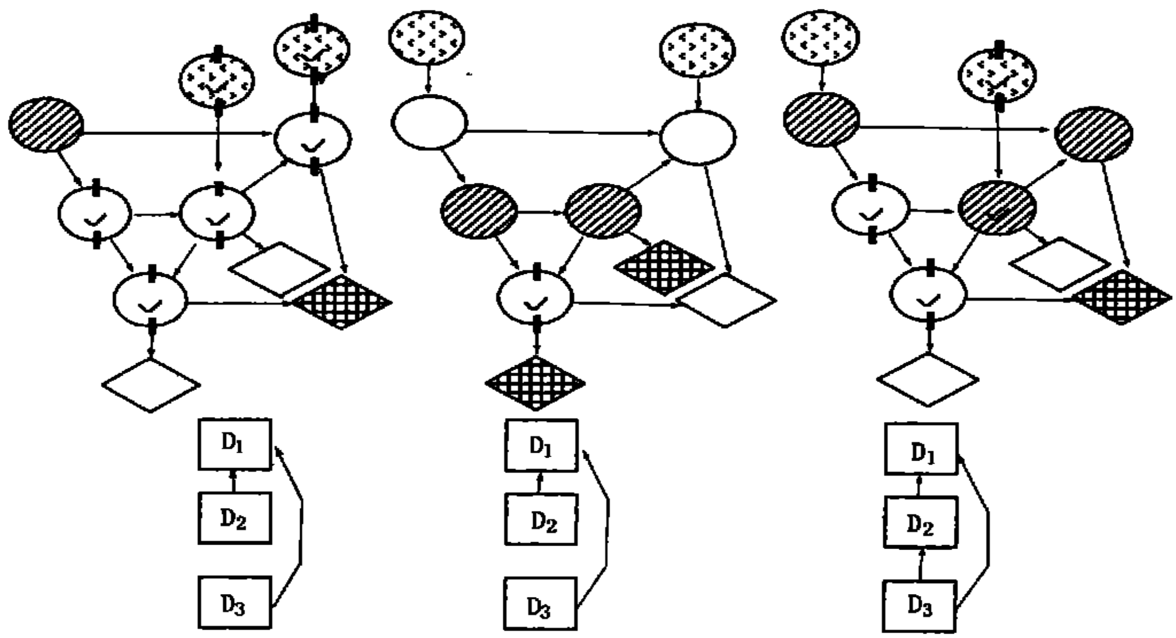

图 3　在 **MAIDs** 中运行 **Construct- SRgraph** 算法

Fig. 3 Running Construct- SRgraph algorithm on MAIDs

2.3 算法正确性证明 证明 Bayes-ball 算法对 S-可达的判定是正确的,这是算法正确性证明的关键.在 $\mathcal{M}_i$ 中,$\forall \bar{D}_j \in \mathcal{M}_i (j \neq i)$.

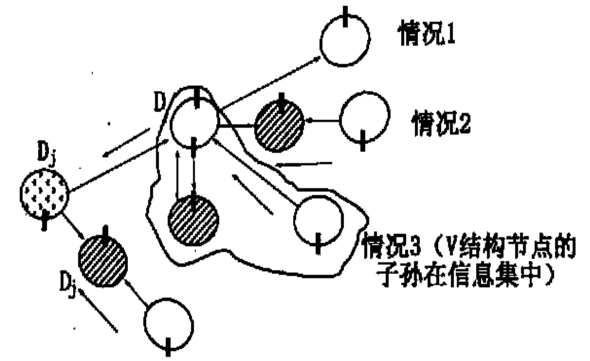

图 **4** 算法正确性证明

Fig. 4 The provement of algorithm' s soundness

定理 **2** (充分性) 若 $\bar{D}_j$ 在给定条件信息 $D_i \cup Pa(D_i)$ 情况下,从 $\forall u \in U_{D_i}$ 出发,运行 Bayes-ball 算法后,被标记“bottom”,则:路径 $\bar{D}_j \to D_j - X_1 - X_2 - \ldots - X_k - u \in U_{D_i}$ 是激活的.

证明 运行Bayes-ball算法后,节点 $\bar{D}_j$ 如果被标记“bottom”,则到达 $\bar{D}_j$ 的路径只可能为图4所示情况:$\bar{D}_j$ 是我们为 D_j 添加的父亲节点.D_j 要么是空白节点,要么属于斜线圆节点.而从其他节点到达 D_j 的路径只可能有 3 种情况,我们可以递归地构造这样的路径直至到达 $u \in U_{D_i}$.分析到达 $u \in U_{D_i}$ 的路径,可以看到:路径中如果出现 $X_{i-1} \to X_i \leftarrow X_{i+1}$,要么 X_i 或 X_i 的一个后代出现在 E 中;要么路径中没有其他节点出现在 E 中.所以 $\bar{D}_j - D_j - X_1 - X_2 - \cdots - X_k - u \in U_{D_i}$ 是激活的.证毕.

定理 **3** (必要性) $\forall \bar{D}_j$ 在给定 $D_i \cup Pa(D_i)$ 时,路径 $\bar{D}_j \to D_j - X_1 - X_2 - \cdots - X_k - u \in U_{D_i}$ 激活,则:运行 Bayes-ball 算法后,$\bar{D}_j$ 被标记“bottom”.

证明 路径 $\bar{D}_j \to D_j - X_1 - X_2 - \cdots - X_k - u \in U_{D_i}$ 激活,意味着:此路径上任意片断,$X_{i-1} - X_i - X_{i+1}$,如果出现 V 结构路径:$X_{i-1} \to X_i \leftarrow X_{i+1}$,则 X_i 或 X_i 的一个后代出现在 $D_i \cup Pa(D_i)$ 中,此外路径中没有其他节点出现在 $D_i \cup Pa(D_i)$ 中.根据Bayes-ball 算法,从 $u \in U_{D_i}$ 出发的 Bayes ball 总是可以到达 $\bar{D}_j$ 的,所以 $\bar{D}_j$ 将被算法标记“bottom”.证毕.

3 结束语

多 Agent 影响图的策略相关图反映了博弈中决策变量间的独立关系.Bayes-ball 算法是判定贝叶斯网中节点间条件独立的有效方法.本文基于 Bayes-ball 方法给出了构造多 Agent 影响图的策略相关图的完整算法.证明了 Bayes-ball 算法对于 S-可达的判定是正确的.得到了策略相关图,我们下一步将分析相关图中反映的决策变量间的独立关系,利用独立关系进一步优化博弈均衡求解算法.

参考文献:

[1] PEARL J. Probabilistic reasoning in intelligent systems [M]. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1988.

[2] HOWARD R A, MATHESON J E. Influence Diagram [A]. Reading on the Priciples and Application of Decision Analysis [C]. Menlo Park: Strategic Decisions Group, 1984, 721—762.

[3] FUDENBERG D, TIROLE J. Game theory[M]. Cambridge: MIT Press, 1991.

[4] KOLLER D, MICLCH B. Multi-agent influence diagram for representing and solving games[A]. Proc 17th IJCAI-Ol[C]. California: Morgan Kaufmann Publishers, 2001, 1027—1034.

[5] SHACTER R D. Bayes-ball: the rational pastime[A]. Proc 14th VAI[C]. California: Morgan Kaufmann Publishers, 1998, 480—487.

Construct strategic relevance graph of multi-agent influence diagram

LI Jin, LIU Wei-yi

(Department of Computer Science, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: S-reachability between two decision nodes in MAIDs is determineal based on the Bayes-ball algovithm. A complete algorithm for constructing the strategic relevance graph of MAIDs is presented. Finally soundness of the algorithm is proved.

Key words: multi-agent influence diagram; S-reachability; strategic relevance graph; Bayes-ball