Dirichlet 空间直交补上对偶 Toeplitz 算子的交换性

王 芳[1], 邓 燕[2]
(1. 西南财经大学 统计学院, 成都 611130; 2. 嘉兴学院 数理与信息工程学院, 浙江 嘉兴 314001)

摘要: 在单位球 Sobolev 空间中, 研究 Dirichlet 空间直交补上多重调和符号的对偶 Toeplitz 算子, 刻画了它的交换性, 并且给出了两个多重调和符号对偶 Toeplitz 算子乘积为对偶 Toeplitz 算子的充分必要条件.

关键词: Sobolev 空间; Dirichlet 空间; 对偶 Toeplitz 算子; 交换性
中图分类号: O177.6 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)02-0213-05

Commuting Dual Toeplitz Operators on Orthogonal Complement of Dirichlet Space

WANG Fang[1], DENG Yan[2]
(1. *School of Statistics*, *Southwestern University of Finace and Economics*, *Chengdu* 611130, *China*; 2. *College of Mathematics Physics and Information Engineering*, *Jiaxing University*, *Jiaxing* 314001, *Zhejiang Province*, *China*)

Abstract: We characterized commuting dual Toeplitz operators with pluriharmonic symbols on the orthogonal complement of Dirichlet space in Sobolev space on the unit ball. We also obtained the sufficient and necessary condition, that is, the product of two dual Toeplitz operators with pluriharmonic symbols for a dual Toeplitz operator.

Key words: Sobolev space; Dirichlet space; dual Toeplitz operator; commutativity

0 引 言

记 $\mathbb{B}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球, $\mathrm{d}\nu$ 为 $\mathbb{B}$ 上规范的 Lebesgue 测度. Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 为全体光滑函数 u: $\mathbb{B}\to\mathbb{C}^n$ 在范数

$$\|u\|_{1/2} = \left(\int_{\mathbb{B}}|u|^2\mathrm{d}\nu + \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{B}}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z_i}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i}\right|^2\right)\mathrm{d}\nu\right)^{1/2} < \infty$$

下的完备化. $L^{2,1}$ 在如下内积下成为 Hilbert 空间:

$$\langle u,v\rangle_{1/2} = \int_{\mathbb{B}}u\bar{v}\mathrm{d}\nu + \sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial z_i},\frac{\partial v}{\partial z_i}\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i},\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_i}\right\rangle,$$

其中"$\langle\cdot,\cdot\rangle$"表示 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{B},\mathrm{d}\nu)$ 中的标准内积. Dirichlet 空间 $\mathscr{D}$ 为 $L^{2,1}$ 中全体满足 $f(0)=0$ 解析函数 $f\in L^{2,1}$ 组成的闭子空间, 则 $\mathscr{D}$ 在如下内积下成为 Hilbert 空间:

$$\langle u,v\rangle_{1/2} = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial z_i},\frac{\partial v}{\partial z_i}\right\rangle.$$

收稿日期: 2010-10-25.
作者简介: 王 芳(1980—), 女, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事统计学与泛函分析的研究, E-mail: wangfang750@gmail.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10871083)和浙江省自然科学基金(批准号: Y6110260).

记 P 为 $L^{2,1}$ 到 $\mathscr{D}$ 上的正交投影, 则 P 可以表示为如下的积分形式:

$$P(u)(w) = \langle u, K_w \rangle_{1/2} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{B}} \frac{\partial u}{\partial z_i} \overline{\frac{\partial K_w(z)}{\partial z_i}} \mathrm{d}\nu(z), \qquad u \in L^{2,1},$$

其中

$$K_w(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{+n}} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{|\alpha| n! \alpha!} z^{\alpha} \overline{w}^{\alpha} \quad (z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{+n})$$

为 $\mathscr{D}$ 的再生核.

定义

$$L^{\infty,1}(\mathbb{B}) = \left\{ \varphi \in L^{2,1}: \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} \in L^{\infty}(\mathbb{B}), \ i = 1, 2, \cdots, n \right\},$$

其中 $L^{\infty}(\mathbb{B})$ 表示 $\mathbb{B}$ 上全体本性有界可测函数组成的代数. 对 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$, 分别定义以 φ 为符号的 Toeplitz算子 $T_{\varphi}(\mathscr{D} \to \mathscr{D})$、Hankel 算子 $H_{\varphi}(\mathscr{D} \to \mathscr{D}^{\perp})$、对偶 Toeplitz 算子 $S_{\varphi}(\mathscr{D}^{\perp} \to \mathscr{D}^{\perp})$ 以及算子 $R_{\varphi}(\mathscr{D}^{\perp} \to \mathscr{D})$ 为

$$T_{\varphi}(u) = P(\varphi u), \quad H_{\varphi}(u) = Q(\varphi u), \quad u \in \mathscr{D};$$
$$S_{\varphi}(u) = Q(\varphi u), \quad R_{\varphi}(u) = P(\varphi u), \quad u \in \mathscr{D}^{\perp},$$

其中 $Q = I - P$ 为 $L^{2,1}$ 到 $\mathscr{D}^{\perp}$ 上的正交投影. 若 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$, 定义 $L^{2,1}$ 上的乘法算子 M_{φ} 为 $M_{\varphi}(u) = \varphi u$, 其中 $u \in L^{2,1}$. 易知 M_{φ} 是有界的. 利用分解 $L^{2,1} = \mathscr{D} \oplus \mathscr{D}^{\perp}$, 乘法算子 M_{φ} 可表示为

$$\begin{pmatrix} T_{\varphi} & R_{\varphi} \\ H_{\varphi} & S_{\varphi} \end{pmatrix}.$$

由等式 $M_{\varphi\psi} = M_{\varphi} M_{\psi}$ 可得这些算子之间的基本代数关系如下:

$$T_{\varphi\psi} = T_{\varphi} T_{\psi} + R_{\varphi} H_{\psi}, \tag{1}$$
$$R_{\varphi\psi} = T_{\varphi} R_{\psi} + R_{\varphi} S_{\psi}, \tag{2}$$
$$H_{\varphi\psi} = H_{\varphi} T_{\psi} + S_{\varphi} H_{\psi}, \tag{3}$$
$$S_{\varphi\psi} = H_{\varphi} R_{\psi} + S_{\varphi} S_{\psi}. \tag{4}$$

近年来, (对偶)Toeplitz 算子的交换性问题受到人们广泛关注. 对于单位圆盘 Hardy 空间, Brown 等[1]给出了一般符号 Toeplitz 算子可交换的充要条件; 对于单位圆盘的 Bergman 空间, Axler 等[2]给出了一个完整的结果, 刻画了调和符号 Toeplitz 算子的交换性; Lee[3]研究了 Dirichlet 空间上调和符号 Toeplitz 算子的交换性.

Stroethoff 等[4]刻画了单位圆盘 Bergman 空间上一般符号的对偶 Toeplitz 算子的(本质)交换性; 文献[5-6]分别将交换性结果推广到单位球和多圆盘上有界多重调和符号的对偶 Toeplitz 算子; 文献[7-8]分别刻画了单位球和多圆盘上对偶 Toeplitz 算子的本质交换性. 本文考虑单位球 Dirichlet 空间上具有多重调和符号的对偶 Toeplitz 算子的乘积及交换性, 推广了单位圆盘 Dirichlet 空间上的已有结果[9-11].

1 主要结果

引理 1[7] 设 f, k, h, g 为 $\mathbb{B}$ 上的解析函数, 则 $f\bar{k} - h\bar{g}$ 在 $\mathbb{B}$ 上解析的充分必要条件是 f, k, h, g 满足如下条件之一:

1) $f = 0$, $h = 0$; 2) $f = 0$, g 为常数; 3) $h = 0$, k 为常数; 4) g, k 都是常数; 5) 存在常数 c 和非零常数 t, 使得 $h = tf$, $k = \bar{t} g + c$.

引理 2 设 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是共轭解析的, 则 $R_{\varphi} = 0$.

证明: 设 $f \in \mathscr{D}^{\perp}$, 则对任意的 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 有[12] $\frac{\partial f}{\partial z_i} \in L_a^2(\mathbb{B})^{\perp}$, 其中: $L_a^2(\mathbb{B})$ 表示 $\mathbb{B}$ 上经典的 Bergman空间; $L_a^2(\mathbb{B})^{\perp}$ 表示 $L^2(\mathbb{B}, \mathrm{d}\nu)$ 在 $L_a^2(\mathbb{B})$ 中的直交补.

因此, 对任意的 $f \in \mathscr{D}^{\perp}$, $h \in \mathscr{D}$, 有

$$\langle \varphi f,h\rangle_{1/2} = \sum_{i=1}^{n}\langle \varphi\frac{\partial f}{\partial z_i},\frac{\partial h}{\partial z_i}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial f}{\partial z_i},\bar{\varphi}\frac{\partial h}{\partial z_i}\rangle = 0,$$

故 $\varphi f\in\mathscr{D}^{\perp}$. 从而 $R_{\varphi}(f)=P(\varphi f)=0$, $\forall f\in\mathscr{D}^{\perp}$, 即 $R_{\varphi}=0$. 证毕.

设 $f,g\in L^{2,1}$, $L^{2,1}$ 上秩一算子 $f\otimes g$ 定义为: $(f\otimes g)h=\langle h,g\rangle_{1/2}f$, $\forall h\in L^{2,1}$. 对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 其中 α_k 为非负整数, 记

$$|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!,\quad z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$

引理 3　在 $\mathscr{D}$ 上, 有

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\otimes z_i = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1} C_{\alpha,n}T_{z^{\alpha}}T_{\bar{z}^{\alpha}},$$

其中

$$C_{\alpha,n} = (-1)^{|\alpha|-1}\cdot n\cdot|\alpha|\cdot\frac{[(j+1)n]!}{[(j+1)n+1-|\alpha|]!\alpha!}.$$

证明: 注意到

$$K_w(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{+n}}\frac{(|\alpha|+n-1)!}{|\alpha|n!\alpha!}z^{\alpha}\bar{w}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{(|\alpha|+n-1)!}{|\alpha|n!\alpha!}z^{\alpha}\bar{w}^{\alpha} =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+n-1)!}{k\cdot n!k!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}z^{\alpha}\bar{w}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+n-1)!}{k\cdot n!k!}\langle z,w\rangle^{k}.$$

使用二项级数 $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+n)}{k!\Gamma(n)}x^{k}$ 可得

$$\frac{\partial}{\partial z_i}K_w(z) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\bar{w}_i}{\langle z,w\rangle}\cdot[(1-\langle z,w\rangle)^{-n}-1],$$

因此

$$\left(\frac{\partial K_w}{\partial z_i}\right)^{-1} = \frac{n}{\bar{w}_i}\cdot\frac{\langle z,w\rangle(1-\langle z,w\rangle)^{n}}{1-(1-\langle z,w\rangle)^{n}} = \frac{n}{\bar{w}_i}\cdot\langle z,w\rangle\sum_{j=0}^{\infty}(1-\langle z,w\rangle)^{(j+1)n} =$$
$$\frac{n}{\bar{w}_i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{(j+1)n}(-1)^{k}\frac{[(j+1)n]!}{[(j+1)n-k]!k!}\langle z,w\rangle^{k+1} =$$
$$\frac{n}{\bar{w}_i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{(j+1)n}(-1)^{k}\frac{[(j+1)n]!}{[(j+1)n-k]!k!}\sum_{|\alpha|=k+1}\frac{(k+1)!}{\alpha!}z^{\alpha}\bar{w}^{\alpha} =$$
$$\frac{n}{\bar{w}_i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}(-1)^{|\alpha|-1}\frac{[(j+1)n]!|\alpha|}{[(j+1)n+1-|\alpha|]!\alpha!}z^{\alpha}\bar{w}^{\alpha} =$$
$$\frac{1}{\bar{w}_i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}z^{\alpha}\bar{w}^{\alpha}.$$

设 $f\in\mathscr{D}$, $w\in\mathbb{B}$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i\otimes z_i)f(w) = \sum_{i=1}^{n}\langle f,z_i\rangle_{1/2}w_i = \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{B}}w_i\frac{\partial f}{\partial z_i}\mathrm{d}\nu(z) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{B}}w_i\frac{\partial f}{\partial z_i}\cdot\overline{\frac{\partial K_w}{\partial z_i}}\cdot\overline{\left(\frac{\partial K_w}{\partial z_i}\right)^{-1}}\mathrm{d}\nu(z) =$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}w^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{B}}\bar{z}^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial z_i}\cdot\overline{\frac{\partial K_w}{\partial z_i}}\mathrm{d}\nu(z) =$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}T_{z^{\alpha}}T_{\bar{z}^{\alpha}}f(w).$$

证毕.

定理 1　设 $\varphi,\psi\in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 为多重调和函数, 则 $S_{\varphi}S_{\psi}=S_{\psi}S_{\varphi}$ 的充分必要条件是如下 3 种情形之一成立:

(i) φ 和 ψ 在 $\mathbb{B}$ 上都是解析的;

(ii) φ 和 ψ 在 $\mathbb{B}$ 上都是共轭解析的;

(iii) φ 和 ψ 在 $\mathbb{B}$ 上的某个非平凡线性组合等于常数.

证明: 充分性. 对 $L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 中的任一解析函数 φ, 显然有 $H_\varphi=0$, 从而(i)成立, 又由式(4)可知 $S_\varphi S_\psi=S_\psi S_\varphi$. 类似地, 由引理2和式(4)知, 若条件(ii)成立, 则 $S_\varphi S_\psi=S_\psi S_\varphi$. 由条件(iii)成立, 易得 $S_\varphi S_\psi=S_\psi S_\varphi$.

必要性. 设 $S_\varphi S_\psi=S_\psi S_\varphi$ 成立, 因为 $1\in\mathscr{D}^\perp$, 故有

$$S_\varphi S_\psi(1)=S_\psi S_\varphi(1). \tag{5}$$

又因为 $\varphi,\psi\in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重调和函数, 则存在解析函数 f,k,h,g, 使得 $\varphi=f+\bar{k}$, $\psi=h+\bar{g}$. 通过计算可得

$$S_\varphi S_\psi(1)=S_\varphi(Q(h+\bar{g}))=Q[(f+\bar{k})Q(h+\bar{g})]=Q((f+\bar{k})\bar{g}).$$

类似地, 有

$$S_\psi S_\varphi(1)=Q((h+\bar{g})\bar{k}).$$

于是, 由式(5)可知

$$(f+\bar{k})\bar{g}-(h+\bar{g})\bar{k}=P((f+\bar{k})\bar{g}-(h+\bar{g})\bar{k}),$$

表明 $f\bar{g}-h\bar{k}$ 在 $\mathbb{B}$ 内是解析的. 由引理1即知引理1中的条件1)~5)成立, 从而保证了(i)~(iii)中的情形成立, 证毕.

定理2 设 $\varphi,\psi\in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重调和函数, 则 $S_\varphi S_\psi=S_{\varphi\psi}$ 的充分必要条件是在 $\mathbb{B}$ 上 φ 是解析的或 ψ 是共轭解析的.

证明: 与定理1类似可知充分性成立.

下面证明必要性, 假设 $S_\varphi S_\psi=S_{\varphi\psi}$ 成立. 因为 $1\in\mathscr{D}^\perp$, 所以

$$S_\varphi S_\psi(1)=S_{\psi\varphi}(1). \tag{6}$$

类似定理1中的证明, 可得 $\varphi=f+\bar{k}$, $\psi=h+\bar{g}$. 直接计算有

$$S_\varphi S_\psi(1)=Q((f+\bar{k})\bar{g}),\qquad S_{\varphi\psi}(1)=Q((f+\bar{k})(h+\bar{g})).$$

又由式(6)得

$$Q((f+\bar{k})h)=Q(\bar{k}h)=0,$$

因此 $\bar{k}h$ 是解析函数.

若 k 是常数, 则 φ 是解析的; 若 k 不是常数, 则 $h=0$, $\bar{\psi}$ 是解析的. 证毕.

定理3 设 $\varphi,\psi\in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重调和函数, 则 $S_\varphi S_\psi$ 为对偶 Toeplitz 算子的充分必要条件是在 $\mathbb{B}$ 上 φ 是解析的或 ψ 是共轭解析的, 此时有 $S_\varphi S_\psi=S_{\varphi\psi}$.

证明: 由定理2, 充分条件显然成立. 下证必要性. 设 $S_\varphi S_\psi=S_u$, 其中 $u\in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$. 由式(1)~(4)和引理2可知

$$R_\psi S_{\bar{z}^\alpha}=T_{\bar{z}^\alpha}R_\psi,\quad S_{z^\alpha}H_\varphi=H_\varphi T_{z^\alpha},\quad S_{\varphi\psi-u}=H_\varphi R_\psi. \tag{7}$$

因此, 由式(4)和(7)以及引理2得

$$S_{|z^\alpha|^2(\varphi\psi-u)}=S_{z^\alpha}S_{\varphi\psi-u}S_{\bar{z}^\alpha}=S_{z^\alpha}(H_\varphi R_\psi)S_{\bar{z}^\alpha}=H_\varphi T_{z^\alpha}T_{\bar{z}^\alpha}R_\psi.$$

由引理3, 有

$$S_{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}|z^\alpha|^2(\varphi\psi-u)}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}H_\varphi T_{z^\alpha}T_{\bar{z}^\alpha}R_\psi=\sum_{i=1}^{n}H_\varphi(z_i\otimes z_i)R_\psi,$$

表明算子 $S_{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}|z^\alpha|^2(\varphi\psi-u)}$ 至多是 n 秩的. 因此, 存在 $n+2$ 次非零多项式 $p(p(0)=0)$, 使得

$$S_{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}|z^\alpha|^2(\varphi\psi-u)}(p(\bar{z}))=0,$$

即函数

$$\Phi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=1}^{(j+1)n+1}C_{\alpha,n}|z^\alpha|^2(\varphi\psi-u)(z)p(\bar{z})=\frac{n\cdot|z|^2(1-|z|^2)^n}{1-(1-|z|^2)^n}(\varphi\psi-u)(z)p(\bar{z})$$

是解析的. 因为当 $|z| \to 1^-$ 时, $\Phi(z) \to 0$, 所以由最大值原理可知 $\Phi(z) = 0$. 因此在 $\mathbb{B}$ 上 $\varphi\psi = u$, 证毕.

推论 1　设 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重调和函数, 则 $S_\varphi S_{\bar\varphi} = S_{\bar\varphi} S_\varphi$ 的充分必要条件是 $\varphi(\mathbb{B})$ 含在复平面 $\mathbb{C}$ 的某一直线中.

证明: 由定理 1 可知 $S_\varphi S_{\bar\varphi} = S_{\bar\varphi} S_\varphi$ 当且仅当 φ 和 $\bar\varphi$ 的非平凡线性组合是常数, 当且仅当 $\varphi(\mathbb{B})$ 含在复平面 $\mathbb{C}$ 的某一直线中.

推论 2　设 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$, 则幂等对偶 Toeplitz 算子 S_φ 只能是 0 或 I.

证明: 设 $S_\varphi^2 = S_\varphi$, 由定理 3 的证明可知 $\varphi^2 = \varphi$, 又由 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是连续的可知 $\varphi = 0$ 或 $\varphi = 1$, 因此 $S_\varphi = 0$ 或 $S_\varphi = I$.

推论 3　设 $\varphi, \psi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重调和函数, 则 $S_\varphi S_\psi = 0$ 的充分必要条件是 $S_\varphi = 0$ 或 $S_\psi = 0$.

证明: 充分性显然. 设 $S_\varphi S_\psi = 0$, 由于 $S_0 = 0$, 则由定理 3 的证明可知 $\varphi\psi = 0$. 因为 $\varphi, \psi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重解析函数, 从而有 $\varphi = 0$ 或 $\psi = 0$. 于是 $S_\varphi = 0$ 或 $S_\psi = 0$.

推论 3 表明多重调和符号的对偶 Toeplitz 算子没有非零的零因子.

推论 4　设 $\varphi \in L^{\infty,1}(\mathbb{B})$ 是多重调和函数, 则对偶 Toeplitz 算子 S_φ 是等距算子的充分必要条件是 φ 是模为 1 的常数.

证明: 由定理 3 易得.

参　考　文　献

[1] Brown A, Halmos P R. Algebraic Properties of Toeplitz Operators [J]. J Für Die Reine Reine Angew Math, 1964, 213: 89-102.

[2] Axler S, Čučković Z. Commuting Toeplitz Operators with Harmonic Symbols [J]. Integ Equa Oper Theory, 1991, 14(1): 1-12.

[3] Lee Y J. Algebraic Properties of Toeplitz Operators on the Dirichlet Space [J]. J Math Anal Appl, 2007, 329(2): 1316-1329.

[4] Stroethoff K, Zheng D. Algebraic and Spectral Properties of Dual Toeplitz Operators [J]. Trans Amer Math Soc, 2002, 354(6): 2495-2520.

[5] LU Yu-feng. Commuting Dual Toeplitz Operators with Pluriharmonic Symbols [J]. J Math Anal Appl, 2005, 302(1): 149-156.

[6] CHENG Guo-zheng, YU Tao. Commuting Dual Toeplitz Operators on the Bergman Space of the Polydisc [J]. Chin Quart J Math, 2009, 24(1): 63-68.

[7] CHEN Yong, YU Tao. Essentially Commuting Dual Toeplitz Operators on the Unit Ball [J]. Adv Math (China), 2009, 38(4): 453-464.

[8] YU Tao, CHENG Guo-zheng. Essentially Commuting Dual Toeplitz Operators on the Polydisc [J]. Acta Math Sin: Chin Ser, 2007, 50(5): 1007-1016.

[9] YU Tao, WU Shi-yue. Algebraic Properties of Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complement of the Dirichlet Space [J]. Acta Math Sin, 2008, 24(11): 1843-1852.

[10] YU Tao, WU Shi-yue. Commuting Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complement of the Dirichlet Space [J]. Acta Math Sin, 2009, 25(2): 245-252.

[11] YU Tao. Operators on the Orthogonal Complement of the Dirichlet Space [J]. J Math Anal Appl, 2009, 357(1): 300-306.

[12] CAO Guang-fu. Toeplitz Operator on the Dirichlet Space [J]. Chin Ann Math: Ser A, 2000, 21(4): 499-512. (曹广福. Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子 [J]. 数学年刊: A 辑, 2000, 21(4): 499-512.)