一维奇异 p-Laplacian 三点边值问题正解的存在性

白 杰[1], 祖 力[2,3]
(1. 东北师范大学人文学院 信息技术学院, 长春 130117; 2. 长春大学 理学院, 长春 130022;
3. 东北师范大学 数学与统计学院, 长春 130024)

摘要: 利用非线性 Leray-Schauder 抉择定理和锥不动点定理, 在假设条件下证明一维非线性奇异 p-Laplacian 三点边值问题解的存在性. 结果表明, 在区间(0,1]上至少存在一个正解.

关键词: Leray-Schauder 抉择定理; 锥不动点定理; 奇异边值问题; 正解的存在性
中图分类号: O175.14 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)04-0621-07

Existence of Positive Solutions for One-Dimensional Singular p-Laplacian Three-Point Boundary Value Problems

BAI Jie[1], ZU Li[2,3]
(1. *School of Information Technology*, *College of Humanities and Sciences of Northeast Normal University*, *Changchun* 130117, *China*; 2. *School of Science*, *Changchun University*, *Changchun* 130022, *China*;
3. *School of Mathematics and Statistics*, *Northeast Normal University*, *Changchun* 130024, *China*)

Abstract: By means of nonlinear Leray-Schauder alternative theorem and fixed point theorem in cones, the authors proved the existence of the solutions for one-dimensional singular p-Laplacian three-point boundary value problems under assumptive conditions. There is at least one positive value in the interval from zero to one.

Key words: Leray-Schauder alternative theorem; fixed point theorem in cones; singular boundary value problem; existence of positive solution

0 引 言

关于一维 p-Laplacian 边值问题的研究目前已有许多结果[1-10]. 翁世有等[8]利用 Schauder 不动点原理和非线性 Leray-Schauder 抉择定理建立了一维 p-Laplacian 奇异边值问题解的一些存在性原则; Agarwal等[11-12]利用 Leray-Schauder 抉择定理得到了 $p=2$ 时正解的存在性.

考虑如下奇异边值问题:

$$\begin{cases}(\Phi(u'))' + q(t)f(u(t)) = 0, & 0 < t < 1,\\ u(0) = 0, \quad u(1) = u(\xi), & 0 < \xi < 1,\end{cases} \tag{1}$$

其中: $\Phi(s) = |s|^{p-2}s$; $p>1$; $q(t)$在 $t=0$ 处有奇性; 非线性项 f 可能在 $u=0$ 处有奇性. 本文应用文献[11-12]的方法, 证明 $p>1$ 时问题(1)存在正解.

1 预备知识

假设:

收稿日期: 2011-09-21.
作者简介: 白 杰(1979—), 女, 锡伯族, 硕士, 讲师, 从事常微分方程的研究, E-mail: baijie1979@tom.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10971021).

(H_1) $q(t)$: $(0,1)\to(0,\infty)$连续, 并且存在$0\leqslant\alpha<p$-1, 使得$\int_0^1 t^{\alpha}q(t)\mathrm{d}t<\infty$成立;

(H_2) $f(u)=g(u)+h(u)$, 其中: $g>0$在$(0,\infty)$上连续且单调不增; $h\geqslant0$在$[0,\infty)$上连续; 且h/g在$(0,\infty)$上单调不减;

(H_3) 存在一个常数$r>0$, 使得

$$\frac{1}{\Phi^{-1}(1+h(r)/g(r))}\int_0^r\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}>\int_0^1\Phi^{-1}\Big(\int_t^1 q(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t \tag{2}$$

成立, 其中$\Phi^{-1}(u):=|u|^{1/(p-1)}\operatorname{sgn}u$是$\Phi(u)$的反函数.

例如, 当$\alpha\in(a-1,p-1)\cap[0,p-1)$时, 函数$q(t)=t^{-a}(0<t<1,\ 0\leqslant a<p)$满足条件($H_1$).

注1 容易验证条件(H_1)表明

$$\int_0^1\Phi^{-1}\Big(\int_t^1 q(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t<\infty.$$

若函数$u(t)$满足下列条件, 则$u(t)$是问题(1)的一个正解:

1) $u\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$;

2) 对任意的$t\in(0,1]$, 有$u(t)>0$, 并且$u(0)=0$, $u(1)=u(\xi)$, $0<\xi<1$;

3) $\Phi(u'(t))$在$(0,1)$上一致绝对连续, 且

$$(\Phi(u'))'+q(t)f(u(t))=0,\quad 0<t<1.$$

定义1[13] 设X为实Banach空间, K是X中的闭凸子集, 若K满足下列条件, 则称K是X中的闭锥(简称锥):

1) 若$x\in K$, $\lambda\geqslant0$, 则$\lambda x\in K$;

2) 若$x\in K$, $-x\in K$, 则$x=0$.

引理1(非线性Leray-Schauder抉择定理)[14] 假设K为Banach空间E的一个凸集, Ω为K的一个相对开子集, $0\in\Omega$, 映射A: $\overline{\Omega}\to K$为一个紧算子, 则下列条件必有一个成立:

1) A在$\overline{\Omega}$上有一个不动点;

2) 存在$x\in\partial\Omega$和$0<\lambda<1$, 使得$x=\lambda A(x)$.

定义$C[0,1]$中锥K为: $K:=\{u\in C[0,1]: u(t)$是非负的凹函数$\}$.

引理2 令$h(t)$: $(0,1)\to(0,\infty)$连续, 且存在$0\leqslant\alpha<p-1$, 使得$\int_0^1 t^{\alpha}h(t)\mathrm{d}t<\infty$, 则

$$\begin{cases}(\Phi(V'))'+h(t)=0,\quad 0<t<1,\\ V(0)=0,\quad V(1)=V(\xi)\end{cases} \tag{3}$$

存在唯一的正解$V\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$.

证明: 先证解的存在性.

当$0<t\leqslant1$时, 设

$$y(t):=\int_{\xi}^{t}\Phi^{-1}\Big(\int_s^t h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s-\int_t^1\Phi^{-1}\Big(\int_t^s h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s.$$

显然, 由注1知, $y(t)$在$(0,1]$上连续严格增, 且$y(\xi)<0<y(1)$. 因此, $y(t)$在$(0,1)$上只有一个零点. 令σ是$y(t)$在$(0,1)$上的唯一零点. 则

$$\int_{\xi}^{\sigma}\Phi^{-1}\Big(\int_s^{\sigma}h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s=\int_{\sigma}^1\Phi^{-1}\Big(\int_{\sigma}^{s}h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s.$$

令

$$V(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\Phi^{-1}\Big(\int_s^{\sigma}h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s, & 0<t\leqslant\sigma,\\ \displaystyle\int_0^{\xi}\Phi^{-1}\Big(\int_s^{\sigma}h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s+\int_t^1\Phi^{-1}\Big(\int_{\sigma}^{s}h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s, & \sigma\leqslant t\leqslant1,\end{cases} \tag{4}$$

则V在$(0,1]$上有定义, 且在$(0,1]$上$V(t)>0$. 进一步, 有

$$V'(t) = \begin{cases} \Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma} h(x)\,\mathrm{d}x\right), & 0 < t \leqslant \sigma, \\ -\Phi^{-1}\left(\int_{\sigma}^{t} h(x)\,\mathrm{d}x\right), & \sigma \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{5}$$

由(H_2)知, 对 $0<t\leqslant\sigma$, 有

$$0 \leqslant V(t) = \int_0^t \Phi^{-1}\left(\int_s^{\sigma} h(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \Phi^{-1}\left(\int_s^{\sigma} \frac{x^{\alpha}}{s^{\alpha}}\, h(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_0^t s^{-\alpha/(p-1)}\Phi^{-1}\left(\int_0^1 x^{\alpha}h(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \frac{p-1}{p-1-\alpha}t^{(p-1-\alpha)/(p-1)}\Phi^{-1}\left(\int_0^1 x^{\alpha}h(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

则 $V(0)=0$.

类似可得 $V(1)=V(\xi)$. 因此, $V(t)$在$[0,1]$上连续, 且

$$V(0) = 0,\quad V(1) = V(\xi);\quad [\Phi(V'(t))]' = -h(t),\quad t \in (0,1).$$

由比较原理易证唯一性. 证毕.

令 $n\geqslant4$ 是一个固定的自然数. 对每个 $u\in K$, 考虑如下问题:

$$\begin{cases} (\Phi(w'(t)))' + q(t)F(u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ w(0) = 1/n, \quad w(1) = w(\xi), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $F(u)=g^*(u)+h(u)$, 满足

$$g^*(u) = \begin{cases} g(u), & u \geqslant 1/n, \\ g(1/n), & u \leqslant 1/n\,. \end{cases}$$

注 2　$g^*(u)\leqslant g(u)$, $\forall u\in(0,\infty)$.

由引理 2, 可得:

引理 3　对每个固定的 $u\in K$, 边值问题(6)存在唯一的解:

$$w(t) = (\Psi u)(t), \qquad w \in K,$$

其中

$$(\Psi u)(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{n} + \displaystyle\int_0^t \Phi^{-1}\left(\int_s^{\sigma_u} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s, & 0 \leqslant t \leqslant \sigma_u, \\ \dfrac{1}{n} + \displaystyle\int_0^{\xi} \Phi^{-1}\left(\int_s^{\sigma_u} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s + \\ \qquad \displaystyle\int_t^1 \Phi^{-1}\left(\int_{\sigma_u}^{s} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s, & \sigma_u \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

$\sigma_u\in(0,1)$为如下方程在 $0\leqslant\tau\leqslant1$ 时的唯一解:

$$z_0(\tau) := \frac{1}{n} + \int_0^{\tau} \Phi^{-1}\left(\int_s^{\tau} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{n} + \int_0^{\xi} \Phi^{-1}\left(\int_s^{\sigma_u} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s +$$

$$\int_{\tau}^1 \Phi^{-1}\left(\int_{\tau}^{s} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s := z_1(\tau). \tag{8}$$

对 $u\in K$, 由 w 和 Ψ 的定义知:

1)

$$w'(t) = \begin{cases} \Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma_u} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right) \geqslant 0, & 0 < t \leqslant \sigma_u, \\ -\Phi^{-1}\left(\int_{\sigma_u}^{t} q(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 0, & \sigma_u \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2) 在$(0,1)$中, $(\Phi(w'(t)))'=-q(t)F(u(t))$, 且 $w(0)=1/n$, $w(1)=w(\xi)$;

3) $w=\Psi u\in K$, $\|w\|=w(\sigma_u)$.

表明 $w(t)$是问题(6)的一个解, 且为定义在$[0,1]$上的凹函数.

类似文献[7]中引理 2.6~引理 2.9 的证明方法, 可得下列引理.

引理 4　令 $w_i(t)$是 $F=F_i(i=1,2)$时问题(6)的一个解. 如果 $F_1\leqslant F_2$, 则 $w_1(t)\leqslant w_2(t)$.

引理5 设$[a,1]\subset(0,1]$是一紧区间, 且令$w(t)$是$F(u)\leqslant M$时问题(6)的一个解, 则

$$|w'(t)|\leqslant C(a,M),\qquad a\leqslant t\leqslant 1.$$

其中: M是一个正常数; $C(a,M)$是一个与a,M有关的正常数.

注3 设$w(t)$是$F(u)\leqslant M$时问题(6)的一个解, 则$w(t)\leqslant 1/n+V_M(t)$, 即$(\Psi u)(t)\leqslant 1/n+V_M(t)$.

注4 设$w(t)$是$F(u)\geqslant m$时问题(6)的一个解, 则$w(t)\geqslant 1/n+V_m(t)$, 即$(\Psi u)(t)\geqslant 1/n+V_m(t)$.

引理6 对任意有界闭子集$\Omega\subset K$, 集合$\Psi(\Omega)$在$[0,1]$上等度连续.

引理7 对任意的有界闭子集$\Omega\subset K$, 映射Ψ: $\Omega\to K$是连续的.

综合引理3~引理7, 可得:

引理8 Ψ: $K\to K$是全连续的.

2 主要结果

定理1 假设条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立, 则在区间$(0,1]$上, 系统(1)至少存在一个解$u\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$, 满足$u>0$, 且$\|u\|<r$.

证明: 先用引理1证明解的存在性. 选择$\varepsilon>0$, 且$\varepsilon<r$, 使得

$$\frac{1}{\Phi^{-1}(1+h(r)/g(r))}\int_\varepsilon^r\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}>\int_0^1\Phi^{-1}\Big(\int_t^1 q(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t.\tag{9}$$

选择$n_0\in\{1,2,\cdots\}$, 使得$1/n_0<\varepsilon$. 令$N^+=\{n_0,n_0+1,\cdots\}$.

下面证明边值问题:

$$\begin{cases}(\Phi(u'))'+q(t)f(u(t))=0, & 0<t<1,\\ u(0)=\dfrac{1}{n}, \quad u(1)=u(\xi), & 0<\xi<1,\quad n\in N^+\end{cases}\tag{10}$$

在$(0,1]$上有一个解: $u_n(t)$, $n\in N^+$, $u_n(t)>\dfrac{1}{n}$, 且$\|u_n\|<r$.

$\forall n\in N^+$, 为证式(10)有一个解, 需考虑如下边值问题:

$$\begin{cases}(\Phi(u'))'+q(t)F(u(t))=0, & 0<t<1,\\ u(0)=1/n, \quad u(1)=u(\xi), & 0<\xi<1,\quad n\in N^+,\end{cases}\tag{11}$$

其中F的定义见式(6).

固定$n\in N^+$. 定义Ψ: $\overline{\Omega}_r\to K$为式(7), 式(7)中$\sigma_u\in(0,1)$为如下方程的唯一解:

$$z_0(\tau):=\frac{1}{n}+\int_0^\tau\Phi^{-1}\Big(\int_s^\tau q(x)F(u(x))\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s=\frac{1}{n}+\int_0^\xi\Phi^{-1}\Big(\int_s^\tau q(x)F(u(x))\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s+$$
$$\int_t^1\Phi^{-1}\Big(\int_\tau^s q(x)F(u(x))\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s:=z_1(\tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1.$$

由引理8, 可得Ψ: $\overline{\Omega}_r\to K$是全连续的.

下面证明

$$u\neq\lambda\Psi u,\quad \lambda\in(0,1),\quad u\in\partial\Omega_r.\tag{12}$$

假设式(12)不成立, 即存在一个$\lambda\in(0,1)$和$u\in\partial\Omega_r$, 使得$u=\lambda\Psi u$, 则有

$$\begin{cases}-(\Phi(u'))'=\lambda^{p-1}q(t)F(u(t)), & 0<t<1,\\ u(0)=\dfrac{\lambda}{n}, \quad u(1)=u(\xi), & 0<\xi<1,\quad n\in N^+.\end{cases}\tag{13}$$

显然存在$\sigma_n\in(0,1)$, 使得在$(0,\sigma_n)$上, $u'(t)\geqslant 0$; 在$(\sigma_n,1)$上, $u'(t)\leqslant 0$, 且$u(\sigma_n)=\|u\|=r$. 再注意到

$$F(u(t))\leqslant g(u(t))+h(u(t)),\qquad t\in(0,1),$$

则当$z\in(0,1)$时,

$$-(\Phi(u'(z)))'\leqslant g(u(z))\Big(1+\frac{h(u(z))}{g(u(z))}\Big)q(z).\tag{14}$$

对式(14)从 $t(0<t\leqslant\sigma_n)$ 到 σ_n 积分, 得

$$u'(t)\leqslant\Phi^{-1}\left(\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\int_t^{\sigma_n}g(u(z))q(z)\mathrm{d}z\right),\tag{15}$$

则有

$$\frac{u'(t)}{\Phi^{-1}(g(u(t)))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma_n}q(z)\mathrm{d}z\right),\tag{16}$$

再从 0 到 σ_n 积分得

$$\int_{\lambda/n}^{r}\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\int_0^{\sigma_n}\Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma_n}q(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t,\tag{17}$$

即

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\int_0^{\sigma_n}\Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma_n}q(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t,\tag{18}$$

因此

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\int_0^{1}\Phi^{-1}\left(\int_t^{1}q(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t,\tag{19}$$

这与条件(9)矛盾, 于是式(12)成立.

由引理 1 可知 Ψ 有一个不动点 $u_n(t)\in\overline{\Omega}_r$, 即 $1/n\leqslant\|u_n\|\leqslant r$(注意到, 如果 $\|u_n\|=r$, 则与式(14)~(19)的证明同理可得矛盾). 因为 $u_n\geqslant1/n$, 所以 $u_n(t)$ 也是问题(10)的一个解.

由(H_2), 当 $r>0$ 时,

$$g(u_n(t))\geqslant g(r),\qquad f(u_n)=h(u_n)+g(u_n)\geqslant g(r).$$

则由注 4, 可得

$$u_n(t)\geqslant\frac{1}{n}+V_{g(r)}(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant1.\tag{20}$$

注 5　注意到在区间$(0,1]$上, $V_{g(r)}(t)>0$, 则 $u_n(t)>0$, $t\in(0,1]$.

下面证明$\{u_n\}_{n\in N^+}$在$[0,1]$上一致有界且等度连续. 由式(14)(用 u_n 代替 u), 可得

$$-(\Phi(u_n'(z)))'\leqslant g(u_n(z))\left(1+\frac{h(u_n(z))}{g(u_n(z))}\right)q(z).\tag{21}$$

因为在$[0,1]$上, $u_n(t)\geqslant1/n$, 则在$(0,\sigma_n)$上存在 $\sigma_n\in(0,1)$, 使得 $u_n'(t)\geqslant0$, 而在$(\sigma_n,1)$上, $u_n'(t)\leqslant0$, 且 $u_n(\sigma_n)=\|u_n\|\leqslant r$.

对式(21)从 $t(0<t<\sigma_n)$ 到 σ_n 积分得

$$\frac{u_n'(t)}{\Phi^{-1}(g(u_n(t)))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma_n}q(z)\mathrm{d}z\right).\tag{22}$$

下面证明存在 $a_0>0$, 使得

$$a_0<\inf\{\sigma_n:n\in N^+\}\leqslant1.\tag{23}$$

如果式(23)不成立, 则存在 N^+ 的子列 S, 使得当 S 中的 $n\to\infty$ 时, $\sigma_n\to0$. 对式(22)从 0 到 σ_n 积分得

$$\int_0^{u_n(\sigma_n)}\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\int_0^{\sigma_n}\Phi^{-1}\left(\int_t^{\sigma_n}q(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t+\int_0^{1/n}\frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))},\tag{24}$$

其中 $n\in S$. 因为当 $n\to\infty$ 时, $\sigma_n\to0$, 则由式(24)可得, 当 $n\to\infty$ 时, $u_n(\sigma_n)\to0$. 又因为 u_n 在$[0,1]$上 σ_n 处取得最大值, 所以当 $n\to\infty$ 时, $C[0,1]$中的函数 $u_n\to0$. 这与式(20)矛盾. 表明

$$\frac{u_n'(t)}{\Phi^{-1}(g(u_n(t)))}\leqslant\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\Phi^{-1}(W(t)),\qquad t\in(0,\sigma_n),\tag{25}$$

其中 $W(t)=\int_{\min(t,a_0)}^{1}q(z)\mathrm{d}z$. 由注 2 知, $\Phi^{-1}(W)\in L^1[0,1]$.

对式(21)从 $\sigma_n(\sigma_n<t<1)$ 到 t 积分得

$$\frac{-u_n'(t)}{\Phi^{-1}(g(u_n(t)))} \leqslant \Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\Phi^{-1}\left(\int_{\sigma_n}^{t} q(z)\mathrm{d}z\right) \leqslant \Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\Phi^{-1}\left(\int_{a_0}^{1} q(z)\mathrm{d}z\right).$$

当 $\sigma_n \leqslant t \leqslant 1$ 时, 有

$$\frac{-u_n'(t)}{\Phi^{-1}(g(u_n(t)))} \leqslant \frac{C}{\Phi^{-1}(g(r))}, \qquad t \in (\sigma_n, 1). \tag{26}$$

则式(25),(26)表明, 当 $t \in (0,1)$ 时,

$$\frac{|u_n'(t)|}{\Phi^{-1}(g(u_n(t)))} \leqslant \Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)[\Phi^{-1}(W(t)) + \Phi(g(r)+h(r))C], \quad t \in (0,1). \tag{27}$$

定义 I: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为 $I(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}y}{\Phi^{-1}(g(y))}$. 注意到 I: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是单调增的映射, 且 $I(\infty)=\infty$, 这是因为 $g(u)>0$ 在 $(0,\infty)$ 上单调不减, 且对任意的 $B>0$, I 在 $[0,B]$ 上连续. $\{I(u_n)\}_{n\in N^+}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界且等度连续, 其等度连续性可从下式得到(这里 $t,s \in [0,1]$):

$$|I(u_n(t)) - I(u_n(s))| = \left|\int_s^t \frac{u_n'(z)}{\Phi^{-1}(g(u_n(z)))}\mathrm{d}z\right| \leqslant$$
$$\Phi^{-1}\left(1+\frac{h(r)}{g(r)}\right)\left|\int_s^t [\Phi^{-1}(W(z)) + \Phi(g(r)+h(r))C]\mathrm{d}z\right|. \tag{28}$$

由不等式(28)、I^{-1} 的一致连续性及

$$|u_n(t) - u_n(s)| = |I^{-1}(I(u_n(t))) - I(u_n(s))|$$

可知 $\{u_n\}_{n\in N^+}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界且等度连续.

由 Arzela-Ascoli 定理, N^+ 存在一个子列 $N \subset N^+$, 使得当 $n \in N$, $n \to \infty$ 时, 存在 $u \in C[0,1]$, 使得 u_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 u. 则由式(20)知, 在 $[0,1]$ 上, $u_n(t) \geqslant V_{g(r)}(t)$. 特别地, 在 $(0,1]$ 上, $u(t)>0$.

固定 $t \in (0,1]$, 有

$$u_n(1) = u_n(t) + \int_t^1 \Phi^{-1}\left[\Phi(u_n'(1)) + \int_s^1 q(x)f(u_n(x))\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s. \tag{29}$$

由式(26), 有

$$|u_n'(1)| \leqslant \Phi^{-1}(g(u_n(1)))\frac{C}{\Phi^{-1}(g(r))} \leqslant \Phi^{-1}(g(V_{g(r)}(1)))\frac{C}{\Phi^{-1}(g(r))},$$

则 $\{u_n'(1)\}_{n\in N}$ 有一个收敛子列; 为方便, 仍用 $\{u_n'(1)\}_{n\in N}$ 表示该子列, 并且令 $r_0 \in \mathbb{R}$ 表示其极限. 则对上面固定的 $t \in (0,1]$, 在 N 上, 令 $n \to \infty$ (注意到 qf 在紧子区间 $[t,1]\times(0,r]$ 上一致连续)得

$$u(1) = u(t) + \int_t^1 \Phi^{-1}\left[\Phi(r_0) + \int_s^1 q(x)f(u(x))\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s, \tag{30}$$

t 取遍 $(0,1]$ 可得

$$u'(t) = \Phi^{-1}\left[\Phi(r_0) + \int_t^1 q(x)f(u(x))\mathrm{d}x\right], \qquad 0 < t \leqslant 1,$$

因此 $r_0 = u'(1)$, 从而有

$$(\Phi(u'))' + q(t)f(u(t)) = 0, \quad 0<t<1, \quad u(0) = u(1) - u(\xi) = 0.$$

最后易证 $\|u\| < r$(注意到如果 $\|u\| = r$, 与式(14)~(19)的证明同理可推出矛盾). 从而证明了问题(1)至少有一个正解 $u(t) \in C[0,1] \cap C^1(0,1]$, 且 $\|u\| < r$. 证毕.

3 应用实例

考虑奇异边值问题:

$$\begin{cases} (\Phi(u'))' + \sigma t^{-m}(u^{-\alpha} + u^{\beta}) = 0, & 0<t<1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = u(\xi), & 0<\xi<1, \end{cases} \tag{31}$$

其中: $0 \leqslant m < p$; $\sigma > 0$; $\alpha > 0$; $\beta > p-1$.

设 $g(u) = u^{-\alpha}$，$h(u) = u^{\beta}$，$q_1(t) = t^{-m}$，$q(t) = \sigma q_1(t)$，$b_1 := \int_0^1 \Phi^{-1}\left(\int_t^1 q_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$. 则 $b_0 = \sigma^{1/(p-1)} b_1$.

应用定理1可知，如果存在 $r > 0$ 满足

$$\sigma < \left[\frac{p-1}{b_1(\alpha+p-1)}\right]^{p-1} \frac{r^{\alpha+p-1}}{1+r^{\alpha+\beta}}, \tag{32}$$

则问题(31)存在一个正解.

设 $T(x) := \frac{x^{\alpha+p-1}}{1+x^{\alpha+\beta}}$，$x > 0$，则 $T(x_0) = \sup\limits_{x\in(0,\infty)} T(x)$，$x_0 = \left(\frac{\alpha+p-1}{\beta+1-p}\right)^{1/(\alpha+\beta)}$. 选择 $r = x_0$，则式(32)成立. 显然，定理1中的(H_1)~(H_3)成立. 因此，问题(31)存在一个解 $u \in C[0,1] \cap C^1(0,1]$，使得在(0,1]上，$u > 0$ 且 $\|u\| < r = x_0$.

参　考　文　献

[1] XU Xian. Multiplicity Results for Positive Solutions of Some Semi-position Three-Point Boundary Value Problems [J]. J Math Anal Appl, 2004, 291(2): 673-689.

[2] SUN Jing-xian, XU Xian, O'Regan D. Nodal Solutions for m-Point Boundary Value Problems Using Bifurcation Methods [J]. Nonlinear Anal: Theory, Method & Applications, 2008, 68(10): 3034-3046.

[3] Gupta C P. Existence and Uniqueness Theorems for the Bending of an Elastic Beam Equations [J]. Appl Anal, 1988, 26(4): 289-304.

[4] Gupta C P. Solvability of a Three-Point Nonlinear Boundary Value Problem for a Second Order Ordinary Differential Equation [J]. J Math Anal Appl, 1992, 168(2): 540-551.

[5] KONG Ling-bin, WANG Jun-yu. Multiple Positive Solutions for the One-Dimensional p-Laplacian [J]. Nonlinear Anal: Theory, Method & Applications, 2000, 42(8): 1327-1333.

[6] Agarwal R P, O'Regan D. Twin Solutions to Singular Dirichlet Problems [J]. J Math Anal Appl, 1999, 240(2): 433-445.

[7] JIANG Da-qing, XU Xiao-jie. Multiple Positive Solutions to a Class of Singular Boundary Value Problems for the One-Dimensional p-Laplacian [J]. Comput Math Appl, 2004, 47(4/5): 667-681.

[8] WENG Shi-you, GAO Hai-yin, ZHANG Xiao-ying, et al. Existence Principles for Singular Boundary Value Prolems of One Dimension p-Laplacian [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2006, 44(3): 351-356. (翁世有，高海音，张晓颖，等. 一维 p-Laplacian 奇异边值问题的存在性原则 [J]. 吉林大学学报：理学版，2006，44(3)：351-356.)

[9] YUAN Cheng-jun, WEN Xiang-dan, MENG Qing-yuan. Existence and Uniqueness of Positive Solutions of Fourth-Order Nonlinear Singular Discrete Boundary Value Problems with p-Lapacian Operator [J]. Journal of Northeast Normal University: Natural Science Edition, 2010, 42(1): 5-9. (苑成军，文香丹，孟庆元. 奇异四阶 p-Lapacian 差分方程边值正解的存在唯一性 [J]. 东北师大学报：自然科学版，2010，42(1)：5-9.)

[10] YUAN Cheng-jun, WEN Xiang-dan. Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Fourth-Order Nonlinear Singular Continuous Boundary Value Problems with p-Lapacian Operator [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2009, 26(2): 190-193. (苑成军，文香丹. 奇异四阶 p-Lapacian 微分方程边值正解的存在惟一性 [J]. 黑龙江大学自然科学学报，2009，26(2)：190-193.)

[11] Agarwal R P, O'Regan D. Existence Theory for Single and Multiple Solutions to Singular Positone Boundary Value Problems [J]. J Differential Equations, 2001, 175(2): 393-414.

[12] Agarwal R P, O'Regan D. Twin Solutions to Singular Boundary Value Problems [J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 2085-2094.

[13] 钟承奎，范先令，陈文源. 非线性泛函分析引论 [M]. 兰州：兰州大学出版社，1998.

[14] Agarwal R P, O'Regan D. Nonlinear Superlinear Singular and Nonsingular Second Order Boundary Value Problems [J]. J Differential Equations, 1998, 143(1): 60-95.

(责任编辑：赵立芹)