第49卷 第2期
2011年3月
吉林大学学报(理学版)
Journal of Jilin University (Science Edition)
Vol.49 No.2
Mar 2011

研究简报

随机元序列几乎处处中心极限定理的推广

叶大相，吴群英
(桂林理工大学 理学院，广西 桂林 541004)

摘要：讨论随机元序列和随机变量序列函数的几乎处处中心极限定理，推广了经典几乎处处中心极限定理中的权重，并改进了经典几乎处处中心极限定理的证明.

关键词：随机元序列；随机函数；几乎处处中心极限定理
中图分类号：O211.4 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2011)02-0251-04

Popularization of Almost Sure Central Limit Theorem of Sequence of Random Element

YE Da-xiang, WU Qun-ying
(*College of Science, Guilin University of Technology, Guilin* 541004, *Guangxi Zhuang Autonomous Region, China*)

Abstract: The authors discussed almost sure central limit theorem for the sequence of random element and functions of random variables, extended the weight to the classics almost sure central limit theorem, and improved the method of traditional subsection summation for the proof of almost sure center limit theorem.

Key words: sequence of random element; function of random variables; almost sure central limit theorem

1 引言与结果

本文记 $d_k = \dfrac{\exp\{\ln^\alpha k\}}{k}$，$0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$，$D_n = \sum\limits_{k=1}^n d_k$，“$\ll$”表示通常意义的“$O$”，“$C$”表示实常数，“~”表示等价关系. 设$(B,d)$为一完备可分的距离空间，$\{Y_n, n\geqslant 1\}$是$B$上的随机元序列. 用$\mu_Y$表示$Y$的分布. 对于几乎处处中心极限定理的研究，目前已有很多成果[1-4]. 关于随机元序列的极限定理，文献[5]给出了如下几乎处处中心极限定理：

定理1[5] 设$\{Y_n, n\geqslant 1\}$是B上的随机元序列. 假设存在一个满足 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，$c_{n+1}/c_n = O(1)$的非降正数序列$\{c_n\}$和$B$值随机元序列$Y_{k,l}$ $(k,l\in\mathbb{N},\ k<l)$，使得对任意有界的Lipschitz函数g和$k<l$，有

$$\max\{E(\min(d(Y_{k,l},Y_l),1)),\operatorname{Cov}(g(Y_{k,l}),g(Y_k))\} \leqslant C(\ln_+\ln_+(c_l/c_k))^{-(1+\varepsilon)},$$

其中：$C>0$，$\varepsilon>0$为常数；$\ln_+ x = \ln(x\vee 1)$. 设$\{d_k^*, k\geqslant 1\}$满足$0\leqslant d_k^* \leqslant \ln(c_{k+1}/c_k)$，且$D_n^* = \sum\limits_{k=1}^n d_k^* \to \infty$，则对$B$的$\sigma$-代数$\mathscr{B}$上的任意概率分布$\mu$，有

$$\frac{1}{D_n^*}\sum_{k=1}^n d_k^* \delta_{Y_k} \Rightarrow \mu \text{ a.s.}, \qquad n\to\infty, \tag{1}$$

当且仅当

$$\frac{1}{D_n^*}\sum_{k=1}^n d_k^* \mu_{Y_k} \Rightarrow \mu, \qquad n\to\infty, \tag{2}$$

收稿日期：2010-05-14.
作者简介：叶大相(1987—)，男，汉族，硕士研究生，从事概率极限理论的研究，E-mail：3040801111@163.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：10661006)和广西研究生教育创新计划项目(批准号：2009105960202M29).

这里“$\Rightarrow$”表示弱收敛.

本文在文献[5]的基础上, 对随机元序列的几乎处处中心极限定理中的权重 d_k^* 做进一步推广, 给出如下结果:

定理 2 设 $\{Y_n, n\geqslant 1\}$ 和 $\{Z_n, n\geqslant 1\}$ 是 B 上的随机元序列. 对任意的常数 $\varepsilon>0$ 和任意有界的 Lipschitz函数 g, 有

$$\max\{E(\min(d(Y_k,Z_l),1)),\mathrm{Cov}(g(Y_k),g(Z_l))\} = (k/l)^{\varepsilon}, \qquad 1\leqslant k<l, \tag{3}$$

则对 B 的 σ-代数 $\mathscr{B}$ 上的任意概率分布 μ, 有

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k \delta_{Y_k} \Rightarrow \mu \text{ a. s.}, \qquad n\to\infty \tag{4}$$

与

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k \mu_{Y_k} \Rightarrow \mu, \qquad n\to\infty \tag{5}$$

等价.

定理 3 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是一期望为零的随机变量序列, $EX_n^2<\infty$. 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $\sigma_n^2=ES_n^2$. 定义随机函数

$$f_k = f_k(X_1,\cdots,X_k) = aS_k + br_k(X_1,\cdots,X_k), \tag{6}$$

其中: $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$; $\sup\limits_n E|r_n|<\infty$, $r_n=O(\sigma_n)$. 如果对任意有界的 Lipschitz 函数 g 及 $\forall\varepsilon>0$, 有

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k g\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)\right) \ll (\ln D_n)^{-(1+\varepsilon)}, \tag{7}$$

且当 $k\to\infty$ 时, $S_k/\sigma_k \xrightarrow{d} N(0,1)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k I\left\{\frac{f_k}{a\sigma_k}\leqslant x\right\} = \Phi(x) \text{ a. s.}, \tag{8}$$

这里 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数.

注 1 如果几乎处处中心极限定理对权重 d_k 成立, 则对 $\{d_k^*, k\geqslant 1\}$, d_k^* 满足 $0\leqslant d_k^*\leqslant d_k$, $D_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^* \to\infty$, 对 d_k^* 仍然成立. 因此对于几乎处处中心极限定理, 权重越大越好. 因此, 本文将定理 1 中的 d_k 推广到 $\dfrac{\exp\{\ln^{\alpha} k\}}{k}$, $0\leqslant\alpha<\dfrac{1}{2}$. 文献[5]是当 $\alpha=0$ 时的情形.

2 定理的证明

引理 1[6] 设 D_n 如上定义, 则 $D_n\sim C(\ln n)^{1-\alpha}\exp\{(\ln n)^{\alpha}\}$, 其中: 当 $0<\alpha<1/2$ 时, $C=1/\alpha$, 当 $\alpha=0$ 时, $C=\mathrm{e}$.

引理 2 对任意实数 $\beta<1$, 取 $n_k=\inf\{n, D_n\geqslant\exp\{k^{\beta}\}\}$, 则 $D_{n_k}\sim\exp\{k^{\beta}\}$, $k\to\infty$.

证明: 由 n_k 的定义有 $D_{n_k}\geqslant\exp\{k^{\beta}\}$, $D_{n_k-1}<\exp\{k^{\beta}\}$. 由引理 1 得

$$\frac{d_n}{D_n}\sim\frac{\exp\{(\ln n)^{\alpha}\}/n}{C(\ln n)^{1-\alpha}\exp\{(\ln n)^{\alpha}\}} = \frac{1}{Cn(\ln n)^{1-\alpha}}\to 0, \qquad n\to\infty.$$

所以

$$\frac{D_{n-1}}{D_n} = \left(1-\frac{d_n}{D_n}\right)\to 1\ (n\to\infty), \qquad 1\leqslant\frac{D_{n_k}}{\exp\{k^{\beta}\}}\sim\frac{D_{n_k-1}}{\exp\{k^{\beta}\}}<1.$$

即 $D_{n_k}\sim\exp\{k^{\beta}\}$.

引理 3 设 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 是均值为零且有界的随机变量列, 且存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$E(\xi_k\xi_l)\ll(k/l)^{\varepsilon}, \qquad 1\leqslant k<l, \tag{9}$$

则 $\dfrac{1}{D_n}\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\xi_k\to 0$ a. s.

证明: 设 $T_n = \frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k\xi_k$, 则有

$$E\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k\xi_k\Big)^2 \leqslant E\Big(2\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} d_k d_l \xi_k\xi_l\Big) \ll \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} d_k d_l E(\xi_k\xi_l) =$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n,\, l/k\geqslant(\ln D_n)^{2/\varepsilon}} d_k d_l E(\xi_k\xi_l) + \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n,\, l/k<(\ln D_n)^{2/\varepsilon}} d_k d_l E(\xi_k\xi_l) \triangleq T_1 + T_2.$$

由式(9)得

$$T_1 \ll \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n,\, l/k\geqslant(\ln D_n)^{2/\varepsilon}} d_k d_l \Big(\frac{k}{l}\Big)^{\varepsilon} \leqslant (\ln D_n)^{-2}\sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{l=1}^{n} d_l \leqslant D_n^2(\ln D_n)^{-2}. \tag{10}$$

令 $n_0 = \max\Big\{l, k\leqslant l\leqslant n, \frac{l}{k}<(\ln D_n)^{2/\varepsilon}\Big\}$, 则 $\ln n_0 < \ln k + \frac{2}{\varepsilon}\ln(\ln D_n)$. 又由引理 1 得: $\ln D_n \sim \ln^{\alpha} n$, $\exp\{(\ln n)^{\alpha}\} \sim CD_n(\ln D_n)^{(\alpha-1)/\alpha}$. 于是结合 $E(\xi_k\xi_l)\ll C$, 得

$$T_2 \ll \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n_0} d_k d_l = \sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{l=k}^{n_0} \frac{\exp\{\ln^{\alpha} l\}}{l} \leqslant \exp\{(\ln n)^{\alpha}\}\sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{l=k}^{n_0}\frac{1}{l} \ll$$

$$\exp\{(\ln n)^{\alpha}\}\sum_{k=1}^{n} d_k(\ln n_0 - \ln k) \ll \exp\{(\ln n)^{\alpha}\} D_n \ln(\ln D_n) \ll$$

$$D_n^2(\ln D_n)^{(\alpha-1)/\alpha}\ln(\ln D_n). \tag{11}$$

由 $0<\alpha<1/2$ 得 $(1-\alpha)/\alpha>1$ 及式(10)与(11)知, 存在 $0<\sigma\leqslant 1$, 使得

$$ET_n^2 \ll (\ln D_n)^{-(1+\sigma)}. \tag{12}$$

取 $\beta<1$, 使得 $\beta(1+\sigma)>1$, 由 $n_k = \inf\{n, D_n \geqslant \exp\{k^{\beta}\}\}$ 及引理 2 得 $D_{n_k} \sim \exp\{k^{\beta}\}$. 由式(12)得 $ET_{n_k}^2 = 1/k^{\beta(1+\sigma)}$. 从而对 $\forall\delta>0$, 由 Markov 不等式得 $\sum_{k=1}^{\infty} P(|T_{n_k}|>\delta) \ll \sum_{k=1}^{\infty} ET_{n_k}^2 < \infty$. 又由 Borel-Cantelli引理得 $T_{n_k}\to 0$ a. s.

对任意的 n, 存在 k 满足 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$, 则

$$\frac{D_{n_{k+1}}}{D_{n_k}} \sim \frac{\exp\{(k+1)^{\beta}\}}{\exp\{k^{\beta}\}} = \exp\Big\{k^{\beta}\Big[\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{\beta} - 1\Big]\Big\} \sim \exp\{\beta\cdot k^{\beta-1}\} \to 1, \qquad k\to\infty.$$

所以

$$|T_n| \leqslant \frac{1}{D_{n_k}}\Big|\sum_{k=1}^{n_k} d_k\xi_k\Big| + \frac{1}{D_{n_k}}\Big|\sum_{k=n_k+1}^{n_{k+1}} d_k\xi_k\Big| \ll |T_{n_k}| + \Big(\frac{D_{n_{k+1}}}{D_{n_k}} - 1\Big) \to 0 \text{ a. s.}$$

即 $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$ a. s.

引理 4[7]　设 $\{\mu_n, \mu, n\geqslant 1\}$ 是 B 上的有限博雷尔测度序列, 则对任意有界的 Lipschitz 函数 g, 有 $\mu_n \Rightarrow \mu(n\to\infty)$ 与 $\lim_{n\to\infty}\int_B g(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_B g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ 等价.

2.1　定理 2 的证明　充分性. 设 $X_k = g(Y_k) - Eg(Y_k)$, K 是一满足 $g(x)<K$, $|g(x)-g(y)|<Kd(x,y)(x,y\in B)$ 的常数. 由式(3)可知, 对 $k<l$, 有

$$|EX_kX_l| = |E(g(Y_k) - Eg(Y_k))(g(Y_l) - Eg(Y_l))| \leqslant$$

$$|E(g(Y_k) - Eg(Y_k))(g(Y_l) - g(Z_l))| + |E(g(Y_k) - Eg(Y_k))(g(Z_l) - Eg(Y_l))| \ll$$

$$E(g(Y_l) - g(Z_l)) + |\mathrm{Cov}(g(Y_k), g(Z_l))| \ll$$

$$E(\min(Kd(Y_k, Z_l), 2K)) + |\mathrm{Cov}(g(Y_k), g(Z_l))| \ll (k/l)^{\varepsilon}.$$

由引理 3 知, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\int_B g(x)\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k\delta_{Y_k}\Big)(x) - \int_B g(x)\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k\mu_{Y_k}\Big)(x) =$$

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k(g(Y_k) - Eg(Y_k)) = \frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_kX_k \to 0 \text{ a. s.}$$

由式(5)及引理4知，当$n\to\infty$，有$\int_B g(x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_k\mu_{Y_k}\right)(x)\to\int_B g(x)\mathrm{d}\mu(x)$. 所以当$n\to\infty$时，有

$$\int_B g(x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_k\delta_{Y_k}\right)(x)\to\int_B g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

由引理4，可得式(4)成立.

必要性. 设$\mu_n=\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_k\mu_{Y_k}$，$\mu_{n,\omega}=\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_k\delta_{Y_k(\omega)}$. 再设$A$为一$\mu$-连续集，即$\mu(\partial A)=0$. 因为$\int_\Omega\mu_{n,\omega}(A)\mathrm{d}P(\omega)=\mu_n(A)$，由式(4)可得

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{n,\omega}(A)=\mu(A)\ \text{a.s.},\tag{13}$$

关于式(13)求期望，并用控制收敛定理可得$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$，所以式(5)成立. 证毕.

注2 由引理3的证明过程可知，如果用$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_k\xi_k\right)\ll(\ln D_n)^{-(1+\varepsilon)}$代替式(3)，定理2仍然成立.

2.2 定理3的证明 令$Y_k=S_k/\sigma_k$，由注2得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_kI\left\{\frac{S_k}{\sigma_k}\leqslant x\right\}=\Phi(x)\ \text{a.s.}\tag{14}$$

由文献[8]中定理7.1以及文献[9]的第二节知，对任意有界的Lipschitz函数g，式(14)与(8)分别等价于：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_kg\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}\Phi(x)\ \text{a.s.},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_kg\left(\frac{f_k}{a\sigma_k}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}\Phi(x)\ \text{a.s.}$$

因此，要证式(8)成立，只需证

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}d_k\left(g\left(\frac{f_k}{a\sigma_k}\right)-g\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)\right)\to 0\ \text{a.s.}\tag{15}$$

成立.

由式(6)得$\frac{f_k}{a\sigma_k}=\frac{S_k}{\sigma_k}+\frac{br_k}{a\sigma_k}$，所以$\left|g\left(\frac{f_k}{a\sigma_k}\right)-g\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)\right|\ll\left|\frac{br_k}{a\sigma_k}\right|\to 0$ a.s. 由Toeplitz引理并结合式(15)得式(8)成立. 证毕.

参 考 文 献

[1] Brosamler G A. An Almost Everywhere Central Limit Theorem [J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1988, 104(3): 561-574.

[2] Schatte P. On Strong Versions of the Central Limit Theorem [J]. Math Nachr, 1988, 137(1): 249-256.

[3] Lacey M T, Philipp W. A Note on the Almost Sure Central Limit Theorem [J]. Statist Probab Lett, 1990, 9(3): 201-205.

[4] Berkes I, Csáki E. A Universal Result in Almost Sure Central Limit Theory [J]. Stoc Proc and Their Appl, 2001, 94(1): 105-134.

[5] CHEN Shou-quan, LIN Zheng-yan. Almost Sure Central Limit Theorems for Functions of Random Variables [J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28(4): 747-756. (陈守全，林正炎. 随机变量序列函数的几乎处处中心极限定理[J]. 数学物理学报, 2008, 28(4): 747-756.)

[6] Fredrik Jonsson. Almost Sure Central Limit Theory [R]. Uppsala: Department of Mathematics, Uppsala University, 2007: 25-26.

[7] Dudley R M. Real Analysis and Probability [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University, 1989.

[8] Billing P. Convergence of Probabilit Measures [M]. New York: Wiley Inter Science, 1968.

[9] Peligrad M, SHAO Qi-man. A Note on the Almost Sure Central Limit Theorem for Weakly Independent Random Variables [J]. Statist Probab Lett, 1995, 22(2): 131-136.