第49卷 第2期 吉林大学学报(理学版) Vol.49 No.2
2011年3月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2011

一个食饵有病的捕食与被捕食模型分析

张永坡[1], 马明娟[1], 黄庆道[2]
(1. 空军航空大学 基础部, 长春 130022; 2. 吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 建立一个食饵具有疾病的生态-流行病模型, 讨论了该模型平衡点的存在性, 并利用特征根法对边界平衡点进行局部渐近稳定性分析, 通过构造 Liapunov 函数得到了两个边界平衡点的全局渐近稳定性和正平衡点的局部渐近稳定性的充分条件.

关键词: 平衡点; 局部渐近稳定; 全局渐近稳定
中图分类号: O175.13 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)02-0191-04

Analysis of Predator-Prey Model with Disease in the Prey

ZHANG Yong-po[1], MA Ming-juan[1], HUANG Qing-dao[2]
(1. *Department of Foundation*, *Aviation University of Air Force*, *Changchun* 130022, *China*;
2. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: A predator-prey model with disease in the prey was established and analysed. The existence of the equilibrium points and the boundedness of solution were studied. The sufficient condition of the local asymptotical stability of the boundary equilibrium was studied with the method of latent root, and furthermore, the global asymptotical stability of two boundary equilibrium points, and the local asymptotical stability of the positive equilibrium point were analyzed, with the sufficient condition of their stability obtained.

Key words: equilibrium; locally asymptotical stability; global asymptotical stability

0 引 言

目前, 大多数流行病动力学模型只涉及单个种群的疾病流行, 而在自然界中, 生态群落间总会由于竞争食物、资源和生存空间而存在一定的联系, 所以有必要将种群和传染病相结合进行研究, 如疾病仅在捕食者之间传染的模型[1-2]、疾病仅在食饵中传播的模型[3-5]、疾病在两竞争种群中传播的模型[6]、疾病在种群之间具有交叉传染的模型[7]等. 本文研究一个种群模型与传染病模型相结合的动力学系统——食饵有病的种群生态模型.

考虑模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = X(a - bX) + k_1e_1SX - k_2e_2IX, \\ \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = cS - e_1SX - \beta SI, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -dI - e_2IX + \beta SI, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2010-05-19.
作者简介: 张永坡(1980—), 男, 汉族, 硕士, 从事生物数学的研究, E-mail: haiquan1234@126.com. 通讯作者: 黄庆道(1968—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事应用数学的研究, E-mail: hqdao@email.jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 40974047; J0630104)和吉林大学"985工程"项目基金.

其中: X 表示捕食者的种群密度; S,I 分别表示易感类食饵者和染病类食饵者的密度; d 为染病食饵的死亡率; c 为增长率; β 为接触率; e_1 为捕食者对易感食饵的捕食系数; k_1 为转化率; e_2 为捕食者对染病食饵的捕食系数; k_2 为捕食者中毒而导致死亡的概率; 考虑到染病的食饵应该容易被捕食(如行动迟缓、有一些表面特征而容易被发现等), 故假设 $e_2>e_1$.

显然, 根据模型(1)容易得到如下结论:

定理1 R_3^+ 是系统的正向不变集.

1 奇点分析

1) 求得模型(1)的非负平衡点如下: $E_0(0,0,0)$, $E_1\left(\frac{a}{b},0,0\right)$, $E_2\left(0,\frac{d}{\beta},\frac{c}{\beta}\right)$, $E_3\left(\frac{c}{e_1},\frac{bc-ae_1}{k_1e_1^2},0\right)$, $E^*(X^*,S^*,I^*)$, 其中: $X^*=\frac{-k_1e_1d+k_2e_2c-a\beta}{(k_1+k_2)e_1e_2-b\beta}$; $S^*=\frac{e_2X^*+d}{\beta}$; $I^*=\frac{-e_1X^*+c}{\beta}$.

2) 平衡点的存在条件: E_0,E_1,E_2 无条件存在, 并且

① 当$\frac{bc}{ae_1}>1$时, E_3 存在; 当

$$0<\beta<\min\left\{\frac{-k_1e_1d+k_2e_2c}{a},\frac{(k_1+k_2)e_1e_2}{b},\frac{k_1e_1e_2c+k_1e_1^2d}{bc-ae_1}\right\}$$

或

$$\beta>\max\left\{\frac{-k_1e_1d+k_2e_2c}{a},\frac{(k_1+k_2)e_1e_2}{b},\frac{k_1e_1e_2c+k_1e_1^2d}{bc-ae_1}\right\}$$

时, $E^*(X^*,S^*,I^*)$存在;

② 当$\frac{bc}{ae_1}<1$时, E_3 不存在; 当$0<\beta<\min\left\{\frac{-k_1e_1d+k_2e_2c}{a},\frac{(k_1+k_2)e_1e_2}{b}\right\}$时, E^*存在.

3) 系统平衡点的局部渐近性分析: 通过分析系统(1)线性近似系统的特征方程, 易得:

定理2 E_0是不稳定的"鞍点", 当 $r<1$ 时, $E_1\left(\frac{a}{b},0,0\right)$是局部渐近稳定的; 当 $r>1$ 时, $E_1\left(\frac{a}{b},0,0\right)$不稳定, 出现平衡点 $E_3\left(\frac{c}{e_1},\frac{bc-ae_1}{k_1e_1^2},0\right)$; 当$0<\beta<\frac{k_1e_1e_2c+k_1e_1^2d}{bc-ae_1}$时, $E_3\left(\frac{c}{e_1},\frac{bc-ae_1}{k_1e_1^2},0\right)$是局部渐近稳定的; 当$\beta<\frac{k_1e_1e_2c+k_1e_1^2d}{bc-ae_1}$时, $E_3\left(\frac{c}{e_1},\frac{bc-ae_1}{k_1e_1^2},0\right)$不稳定. 其中$r=\frac{bc}{ae_1}$.

2 边界平衡点的全局性态

定理3 当$r<1$, $k_2e_2a<k_1bd$时, 平衡点 $E_1\left(\frac{a}{b},0,0\right)$是全局渐近稳定的.

证明: 设$X_1=\frac{a}{b}$, 将平衡点代入方程(1), 得到等价系统:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=X[-b(X-X_1)+k_1e_1S-k_2e_2I],\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=S(c-e_1X-\beta I),\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=I(-d-e_2X+\beta S).\end{cases}\tag{2}$$

做 Liapunov 函数如下:

$$V(t)=X-X_1-X_1\ln\frac{X}{X_1}+k_1(S+I),$$

它沿着系统轨线的全导数为

$$V'(t)=X'(t)-X_1\frac{X'(t)}{X(t)}+k_1(S'(t)+I'(t))=$$
$$-b(X-X_1)^2+(k_2e_2X_1-k_1d)I+(k_1c-k_1e_1X_1)S-e_2IX.$$

因为 $k_2e_2a<k_1bd$，$r=\frac{bc}{ae_1}<1$，所以 $k_2e_2X_1-k_1d<0$，$k_1c-k_1e_1X_1<0$，故 $V'(t)\leqslant 0$. 当且仅当 $X=X_1$，$I=0$，$S=0$ 时，$V'(t)=0$，由 $V(t)$ 的无穷大正定和 $V'(t)$ 的负定可知，平衡点在满足定理 3 的条件下是全局渐近稳定的.

定理 4　对于平衡点 $E_3\left(\frac{c}{e_1},\frac{bc-ae_1}{k_1e_1^2},0\right)=E_3(X_3,S_3,0)$，若其存在，即 $r>1$，同时满足 $0<\beta<\frac{k_1e_1^2d-k_2e_1e_2c}{bc-ae_1}$，则其为全局渐近稳定的.

证明：将平衡点代入方程(1)，得到等价系统如下：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=X[-b(X-X_3)+k_1e_1(S-S_3)-k_2e_2I],\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=S[-e_1(X-X_3)-\beta I],\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=I(-d-e_2X+\beta S).\end{cases}\tag{3}$$

做 Liapunov 函数如下：

$$V(t)=X-X_3-X_3\ln\frac{X}{X_3}+k_1\left(S-S_3-S_3\ln\frac{S}{S_3}+I\right),$$

它沿着系统轨线的全导数为

$$V'(t)=X'(t)-X_3\frac{X'(t)}{X(t)}+k_1\left[S'(t)-S_3\frac{S'(t)}{S(t)}+I'(t)\right]=$$
$$-b(X-X_3)^2-(k_1+k_2)e_2IX+(k_2e_2X_3+k_1\beta S_3-k_1d)I.$$

显然，当 $\beta<\frac{k_1e_1^2d-k_2e_1e_2c}{bc-ae_1}$ 时，$k_2e_2X_3+k_1\beta S_3-k_1d<0$，故 $V'(t)\leqslant 0$，当且仅当 $X=X_3$ 且 $I=0$ 时，有 $V'(t)=0$，并且此时 $S=S_3$. 由 $V(t)$ 的无穷大正定和 $V'(t)$ 的负定可知，平衡点在定理 4 的条件下是全局渐近稳定的.

3　正平衡点的局部渐近稳定性

定理 5　当 $r>1$，$\beta>\max\left\{\frac{-k_1e_1d+k_2e_2c}{a},\frac{(k_1+k_2)e_1e_2}{b},\frac{k_1e_1e_2c+k_1e_1^2d}{bc-ae_1}\right\}$ 且 $(k_1+k_2)e_1>k_2b$ 时，正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.

证明：把方程(1)做如下变换：令 $x=X-X^*$，$s=S-S^*$，$i=I-I^*$，则方程(1)化简为：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(x+X^*)(-bx+k_1e_1s-k_2e_2i),\\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=(s+S^*)(-e_1x-\beta i),\\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=(i+I^*)(-e_2x+\beta s).\end{cases}\tag{4}$$

因此，只需研究等价系统(4)零点的渐近性态即可. 系统(4)线性近似系统在零点的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-bX^*-\lambda & k_1e_1X^* & -k_2e_2X^*\\ -e_1S^* & -\lambda & -\beta S^*\\ -e_2I^* & \beta I^* & -\lambda\end{vmatrix}=0,$$

化简得

$$A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0,$$

其中: $A_3 = 1$; $A_2 = bX^*$; $A_1 = \beta^2 S^* I^* + k_1 e_1^2 X^* S^* - k_2 e_2^2 X^* I^*$; $A_0 = \beta[b\beta - (k_1 + k_2)e_1 e_2]X^* S^* I^*$. 显然 $A_3 = 1 > 0$, $A_2 = bX^* > 0$. 由于 $\beta > \dfrac{(k_1 + k_2)e_1 e_2}{b}$, 故 $A_0 > 0$. 下面证明 $A_1 > 0$. 由于

$$A_1 = \beta^2 S^* I^* + k_1 e_1^2 X^* S^* - k_2 e_2^2 X^* I^* >$$

$$\beta^2 \frac{e_2 X^* + d}{\beta} I^* - k_2 e_2^2 X^* I^* = e_2(\beta - k_2 e_2) X^* I^* + \beta d I^* > 0,$$

并且

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^2 S^* I^* + k_1 e_1^2 X^* S^* - k_2 e_2^2 X^* I^* & \beta[b\beta - (k_1 + k_2)e_1 e_2]X^* S^* I^* \\ 1 & bX^* \end{vmatrix} >$$

$$\left[(k_1 + k_2)e_1 e_2 \beta \frac{e_2 X^* + d}{\beta} - k_2 e_2^2 b X^*\right] X^* I + k_1 e_1^2 b X^{*2} S^* =$$

$$e_2^2[(k_1 + k_2)e_1 - k_2 b] X^{*2} I^* + (k_1 + k_2)e_1 e_2 d X^* I^* + k_1 e_1^2 b X^{*2} S^*,$$

因为 $(k_1 + k_2)e_1 > k_2 b$, 所以 $\begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix} > 0$ 成立. 根据赫尔维茨判据, 可知特征方程

$$\lambda^3 + bX^*\lambda^2 + (\beta^2 S^* I^* + k_1 e_1^2 X^* S^* - k_2 e_2^2 X^* I^*)\lambda + \beta[b\beta - (k_1 + k_2)e_1 e_2]X^* S^* I^* = 0$$

的根均具有负实部, 所以系统(4)的零解是局部渐近稳定的, 即系统(1)的正平衡点是局部渐近稳定的.

参 考 文 献

[1] ZHANG Yong-jun, WANG Mei-juan, XU Jin-rui. Epidemics in Predator-Prey Model with Bilinear Incidence and Disease in Predator [J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2009, 31(5): 409-413. (张拥军, 王美娟, 徐金瑞. 捕食者具有传染病的捕食系统模型分析 [J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(5): 409-413.)

[2] SUN Shu-lin, YUAN Cun-de. On the Analysis of Predator-Prey Model with Epidemic in the Predator [J]. Journal of Biomathematics, 2006, 21(1): 97-104. (孙树林, 原存德. 捕食者具有流行病的捕食-被捕食(SI)模型的分析 [J]. 生物数学学报, 2006, 21(1): 97-104.)

[3] XIAO Yan-ni, CHEN Lan-sun. Modeling and Analysis of a Predator-Prey Model with Disease in the Prey [J]. Math Biosci, 2001, 171(1): 59-82.

[4] HUANG You-xia, WANG Hui, SU Dan-dan. Study on the Stability of an Eco-Epidemiological Model with Disease in the Prey [J]. Journal of Biomathematics, 2008, 23(1): 132-138. (黄友霞, 王辉, 苏丹丹. 食饵有病的生态-流行病模型的稳定性研究 [J]. 生物数学学报, 2008, 23(1): 132-138.)

[5] LI Jian-jun, LI Jian, GAO Wen-jie. Analysis of a Prey-Predator Model for Prey Epidemic Disease [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2009, 47(2): 191-196. (李建军, 李健, 高文杰. 被捕食者具有流行病的被捕食-捕食模型分析 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47(2): 191-196.)

[6] HAN Li-tao, YUAN San-ling, MA Zhi-en. Persistence of an SIRS Epidemic Model of Two Competitive Species [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(2): 172-176. (韩丽涛, 原三领, 马知恩. 两种群相互竞争的 SIRS 传染病模型的持续生存 [J]. 工程数学学报, 2004, 21(2): 172-176.)

[7] Zaichik L I, Pershukov V A, Kozelev M V, et al. Hopf Bifurcation in Epidemic Models with a Latent Period and Nonpermanent Immunity [J]. Math Compute Modeling, 1997, 25(2): 85-107.