云南大学学报（自然科学版），2004，26（6）：475～478　　CN 53 - 1045/ N　ISSN 0258 - 7971
Journal of Yunnan University

Hilbert 空间中函数和的次微分规则及应用 *

邵远夫，李成林
（云南大学 数学系，云南 昆明　650091）

摘要：给出了 Hilbert 空间中非光滑函数和次微分的“局部”和规则，讨论了这个和规则的应用．利用“局部和规则”，讨论并得到了一类较广的复合优化问题的最优必要条件．

关键词：近似次微分；近似法锥；和规则；复合优化问题；最优必要条件

中图分类号：O177.92　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258 - 7971(2004)06 - 0475 - 04

非光滑函数和的次微分规则，简称“和规则”，始终是非光滑优化理论研究的一个主要论题．由和规则往往可以导出优化问题的必要条件（参见文献[1，2，7，11]）．文献[1]给出了 2 个非光滑函数的“和规则”．那么，Hilbert 空间中多个函数的“和规则”又怎样呢？受文献[2]和[7]中的“和规则”的启发，我们给出了 Hilbert 空间中多个函数和的次微分规则，即“局部和规则”．这个和规则放宽了文献[1]的“和规则”中对函数的限制条件，并将 2 个函数和的次微分规则推广到多个函数和的情形．最后讨论了这个“和规则”的应用．利用“局部和规则”，我们研究了一类复合优化问题，并得出了该问题的最优必要条件，该复合问题还放宽了文献[5]中对目标函数的约束条件．

1　预备知识

在本文中，若无特别指明，总假定 X 是实 Hibert 空间．设 S 是 X 的非空闭子集，$u\notin S$，如果 $\exists x\in S$，使 x 到 u 的距离最小，那么 x 叫做点 u 到集 S 的最近点．向量 $u-x$ 叫做集 S 在点 x 的近似法向量．令 $\zeta=t(u-x)$，$t\geq 0$，所有这样的向量 ζ 的集合叫做集 S 在点 x 的近似法锥，记为 $N_S^p(x)$．对函数 $f:X\to\overline{R}=R\cup\{+\infty\}$，用 $\mathrm{epi}(f)$ 表示 f 的上图．

定义 1　设 $f:X\to\overline{R}$ 是下半连续函数，$x\in\mathrm{dom}f=\{x\in X:f(x)<+\infty\}$．$\zeta\in X$ 叫做 f 在 x 的近似次梯度，如果 $(\zeta,-1)\in N^p_{\mathrm{epi}(f)}(x,f(x))$．所有这样 ζ 的的集合叫做 f 在 x 的近似次微分，记做 $\partial_p f(x)$，即

$$\partial_p f(x)=\{\zeta\in X:(\zeta,-1)\in N^p_{\mathrm{epi}(f)}(x,f(x))\}.$$

在下面的讨论中，我们要用到 $\partial_p f(x)$ 的下列性质（其证明见[1]）．

(1) 如果 $x\in S$，那么 $\partial_p I_S(x)=N_S^p(x)$．其中 $N_S^p(x)$ 是 S 在 x 处的近似法锥；$I_S(x)$ 是集 $S\subset X$ 的指示函数，即当 $x\in S$ 时，$I_S(x)=0$；当 $x\notin S$ 时，$I_S(x)=+\infty$.

(2) 记 $F(X)=\{f:X\to R$ 下半连续$\}$，对 $f\in F(X)$，如果 f 在点 $x\in X$ 处取局部最小值，那么 $0\in\partial_p f(x)$．

(3) 设 $f\in F(X)$，$x\in\mathrm{dom}f$，那么

$$\zeta\in\partial_p f(x)\Leftrightarrow\exists\delta,\eta>0,f(y)\geq f(x)+\langle\zeta,y-x\rangle-\delta\|y-x\|^2,\forall y\in B(x,\eta).$$

其中 $B(x,\eta)=\{y\in X:\|y-x\|\leq\eta\}$．

(4)“和规则”：设 $f_1,f_2:X\to\overline{R}$ 是弱下半连续函数，$x\in\mathrm{dom}f_1\cap\mathrm{dom}f_2$ 且 $\zeta\in\partial_p(f_1+f_2)(x_0)$．那么 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_i\in B(x_0,\varepsilon)$，$|f_i(x_0)-f_i(x_i)|<\varepsilon$，$i=1,2$，有

$$\zeta\in\partial_p f_1(x_1)+\partial_p f_2(x_2)+\varepsilon B_X.$$

其中 B_X 是 X 的闭单位球，而 f 在点 x 处弱下半连

---

* **收稿日期**：2004 - 03 - 18
基金项目：云南省教育厅科研基金资助项目(02ZD023)
作者简介：邵远夫(1974 -　)，男，湖南人，在读硕士生，主要从事泛函分析及其应用研究．

续是指:点列$\{x_i\}$弱收敛于 x 时,有$\liminf\limits_{t\to\infty} f(x_i) \ge f(x)$.

(5)“链规则”:设 X, Y 是 Hilbert 空间, $g \in F(Y)$, $F: X \to Y$ 是线性局部Lipschitzs函数, g 是弱下半连续函数,令 $f(x) := g(F(x))$, $\zeta \in \partial_p f(x_0)$. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in x_0 + \varepsilon B_X$, $y' \in F(x_0) + \varepsilon B_Y$, $\gamma \in \partial_p g(y')$,满足

$\| F(x') - F(x_0) \| < \varepsilon$ 且 $\zeta \in \partial_p \{\langle \gamma, F(.)\rangle\}(x') + \varepsilon B_X$.

定义 2 设 $E \subset X$ 是一个闭子集,函数 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 是 E 上的下半连续函数,称 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 在 E 上是一致下半连续的,如果

$$\inf_{x\in E}\sum_{n=1}^N f_n(x) \le \lim_{\varepsilon\to 0} \inf\{\sum_{i=1}^N f_n(x_n) : \| x_n - x_m \| \le \varepsilon, x_n, x_m \in E; n, m = 1,2,\cdots,N\}.$$

称 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 是局部一致下半连续的,如果 $\forall x \in \bigcap_{n=1}^N \mathrm{dom} f_n$, $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 在以点 x 为心的一个闭球上是一致下半连续的.

由定义 2 直接可得:

(6)[2] 如果 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 在 X 上是下半连续的, E 为 X 的闭子集,那么下述条件是 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 在 E 中一致下半连续的充分条件:

1) 函数 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 中,除一个以外其余 $N-1$ 个函数在 E 中一致下半连续;

2) X 是有限维空间,并且 E 是有界集;

3) 函数 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 中至少有一个有紧的水平集.

2 次微分的“局部和规则”

文献[1]中给出了 2 个函数和的次微分规则,为了应用的方便,本节给出 $N(N \ge 2)$ 个函数和次微分的“局部和规则”,其中每个函数下半连续. 为了叙述方便,我们先给出一个引理,它的证明只需运用变分原理(见文献[6]) 并仿照文献[2]中定理 2.9 的证明即可完成.

引理 1 设 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 是定义在 X 上的下半连续函数,且是局部一致下半连续的,又 $\sum_{n=1}^N f_n$ 在 $x \in X$ 处取局部最小值,那么,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_n \in x + \varepsilon B$, $\zeta_n \in \partial_p f_n(x_n)$, $n = 1,2,\cdots,N$,满足 $| f_n(x_n) - f_n(x) | < \varepsilon$,

$\| \zeta_n \| \mathrm{diam}\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}) < \varepsilon$, 且使得

$$\| \sum_{n=1}^N \zeta_n \| < \varepsilon.$$

定理 1 (局部和规则) 设 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 是定义在 X 上的下半连续函数, $x \in \bigcap_{n=1}^N \mathrm{dom}(f_n)$,那么,对 $\forall \zeta \in \partial_p(\sum_{n=1}^N f_n)(x)$, $\varepsilon > 0$,以及 0 点的任意弱邻域 V, $\exists x_n \in x + \varepsilon B$, $\zeta_n \in \partial_p f_n(x_n)$, $n = 1,2,\cdots,N$,满足

$| f_n(x_n) - f_n(x) | < \varepsilon$, $\| \zeta_n \| \mathrm{diam}(\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}) < \varepsilon$, $n = 1,2,\cdots,N$,且使得

$$\zeta \in \sum_{n=1}^N \zeta_n + V.$$

证明 令 $\varepsilon > 0$, V 是 X 中 0 点的弱邻域, L 是 X 中包含点 x 的有限维子空间,并取 $r > 0$ 满足: $L^{\perp} + 3rB_X \subset V$, $\forall \zeta \in \partial_p(\sum_{n=1}^N f_n)(x)$,那么由第 1 节中的(3), $\exists \delta, \eta > 0$ 满足:

$$(\sum_{n=1}^N f_n)(y) \ge (\sum_{n=1}^N f_n)(x) + \langle \zeta, y - x\rangle - \delta \| y - x \|^2, \forall y \in B(x, \eta).$$

从而 $y \to (\sum_{n=1}^N f_n)(y) - \langle \zeta, y - x\rangle + \delta \| y - x \|^2 + I_L(y)$ 在 $B(x, \eta)$ 中的点 x 处取局部最小值. 而由 1 中的(6) 可知,

$$y \to (f_1(y), f_2(y), \cdots, f_N(y), -\langle \zeta, y - x\rangle, \delta \| y - x \|^2, I_L(y))$$

是一致下半连续的,故满足引理的条件,从而由引理可知, $\exists x_n \in x + \varepsilon B$, $\zeta_n \in \partial_p f(x_n)$, $\zeta_{N+1} = -\zeta$, $\zeta_{N+2} \in 2\delta\partial_p \| x_{N+2} - x \|$, $\zeta_{N+3} \in \partial_p I_L(x_{N+3})$,满足:

$| f_n(x_n) - f_n(x) | < \varepsilon$,

$\| \zeta_n \| \mathrm{diam}(\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}) \le$

$\| \zeta_n \| \mathrm{diam}(\{x_1, x_2, \cdots, x_{N+3}\}) < \varepsilon$, $n = 1, 2, \cdots, N$,

$| I_L(x_{N+3}) - I_L(x) | < \varepsilon$, $x_{N+3} \in L$,

有 $\sum_{n=1}^N \zeta_n - \zeta + \zeta_{N+2} + \zeta_{N+3} \in rB_X$,

而 $\partial_P I_L(x_{N+2}) = L^{\perp}$,

$\zeta_{N+2} \in 2\delta\partial_p \| x_{N+2} - x \| \subset 2rB_X$.

所以,

$$\zeta \in \sum_{n=1}^N \zeta_n + v.$$ 证毕.

注: 1) 在一定条件下, Hilbert 空间中的近似次

可微与 Lipschitz 光滑具有等价性(参见文献[3,4]),"和规则"与中值定理等价(参见文献[7,8]).

2) 该"和规则"的局部性表现在"$x_n \in x+\varepsilon B$",定理中 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 只需下半连续即可,这放宽了第 1 节的(4)中对函数的限制条件.

3 "局部和规则"的应用

本节主要讨论局部和规则的应用.考虑复合优化问题

$$(MP)\quad \begin{aligned} &\min f_0(F_0(x)),\\ &f_i(F_i(x)) \le 0,\ i=1,\cdots,N,\\ &x \in C.\end{aligned}$$

其中 $f_0: Y \to \overline{R}$ 是弱下半连续函数, $F_0: X \to Y$ 是线性局部 Lipschitz 函数, $f_i: Y \to \overline{R}$ 是下半连续函数, $F_i: X \to Y$ 是连续函数, X, Y 均是 Hilbert 空间, $C \subset X$ 是一个闭子集.

定理 2 设 $\overline{x}$ 是复合问题(MP)的最优解,那么对 $\forall \varepsilon > 0$ 以及 0 点的任何弱邻域 V, $\exists x_i \in B(\overline{x}, \varepsilon)$, $i=0,1,\cdots,N+1$, $y' \in F_0(\overline{x})+\varepsilon B_Y$ 以及 $\gamma \in \partial_p f_0(y')$,满足 $\|F_0(\overline{x})-F_0(x_0)\|<\varepsilon$, $|I_{S_i}(x_i)-I_{S_i}(\overline{x})|<\varepsilon$, $i=1,2,\cdots,N+1$,且有

$$0 \in \partial_p\{\langle \gamma, F(.)\rangle\}(x_0)+\sum_{i=1}^{N}\zeta_i+N_C^P(\overline{x})+V,$$

其中 $S_i=\{x: f_i(F_i(x)) \le 0\}$, $i=1,2,\cdots,N$, $S_{N+1}=C$.

证明 作函数 $g: X \to \overline{R}$, $g(x)=f_0(F_0(x))+\sum_{i=1}^{N} I_{S_i}(x)+I_C(x)$,那么 $g(x)$ 是一个下半连续函数.因为 $\overline{x}$ 是(MP)的解,所以 $0 \in \partial_p g(\overline{x})$.对 $\forall \varepsilon>0$ 以及 0 点的任何弱邻域 V,取 0 点的弱邻域 V_1,使 $V_1+\varepsilon B_X \subset V$.

现在先来求 $\partial_p f_0(F_0(\overline{x}))$.因为 f_0 是弱下半连续函数, F_0 是线性局部 Lipschitz 的,设 $\zeta_0 \in \partial_p f_0(F_0(\overline{x}))$,则由链规则可知对上述的 $\varepsilon>0$, $\exists x_0 \in \overline{x}+\varepsilon B_X$, $y' \in F_0(\overline{x})+\varepsilon B_Y$, $\gamma \in \partial_p f_0(y')$ 满足 $\|F_0(x_0)-F_0(\overline{x})\|<\varepsilon$ 且 $\zeta_0 \in \partial_p\{\langle \gamma, F_0(.)\rangle(x_0)+\varepsilon B_X$.

然后求 $\partial_p \sum_{i=1}^{n} I_{S_i}(\overline{x})$.显然 $I_{S_i}(x)$, $i=1,2,\cdots,N$ 是下半连续函数, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{dom}\, I_{S_i}(x)$.设 $\zeta \in \partial_p(\sum_{i=1}^{n} I_{S_i})(\overline{x})$,由"局部和规则",对上述的 $\varepsilon>0$ 以及 0 点的弱邻域 V_1, $\exists x_i \in \overline{x}+\varepsilon B_X$ 满足

$|I_{S_i}(\overline{x})-I_{S_i}(x_i)|<\varepsilon$, $\zeta_i \in \partial_p I_{S_i}(x_i)=N_{S_i}^P(x_i)$, $i=1,2,\cdots,N$, $\|\zeta_i\|\mathrm{diam}(\{x_1,x_2,\cdots,x_N\})<\varepsilon$,

且

$$\zeta \in \sum_{i=1}^{N}\zeta_i+V_1,\text{显然 } \partial_p I_C(\overline{x})=N_C^P(\overline{x}).$$

最后把和规则用于 $g(x)$ 上,则

$\forall \varepsilon>0$, $\exists x_i \in \overline{x}+\varepsilon B_X$, $i=0,1,\cdots,N+1$, $y' \in F_0(\overline{x})+\varepsilon B_Y$, $\gamma \in \partial_p f_0(y')$,

使

$\|F_0(\overline{x})-F_0(x_0)\|<\varepsilon$, $|I_{S_i}(\overline{x})-I_{S_i}(x_i)|<\varepsilon$, $i=1,2,\cdots,N+1$,且满足

$$0 \in \partial_p\{\langle \gamma, F(.)\rangle\}(x_0)+\sum_{i=1}^{N}\zeta_i+N_C^P(\overline{x})+V.$$

证毕.

注:该定理给出了一类复合优化问题(MP)的最优必要条件,其中约束函数 $f_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为下半连续函数, F_i 为连续函数,这放宽了文献[5]中 f_i 为局部 Lipschitz 函数的约束条件,同时也放宽了文献[9,10]中 F_i 为 Lipschitz 函数的假设.

参考文献:

[1] CLARKE F H, LEDYAEV Y S. Nonsmooth analysis and control theory[M]. New York: Springer - verlag, 1998.

[2] BORWEIN J M, ZHU Q J. Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Bananch spaces with applications to metric regularity[J]. SIAM J Cont and Opti, 1996, 34: 1 568—1 591.

[3] ROCKAFELLAR R T. Proximal subgradients marginal values and augmented Lagrangians in nonconvex optimization[J]. Math Oper Res, 1981, 6: 424—436.

[4] LINDENSTRAUSS J, TZAFRIRI L. Classical Bananch spaces: Function spaces[M]. Berlin: Springer - verlag, 1979.

[5] STUDNIARSKI M, JEYAKUMAR V. A generalized mean - value theorem and optimality conditions in composite nonsmooth minimization[J]. Nonlinear Anal TMA, 1995, 24: 83—894.

[6] BORWEIN J M, PREISS D. A smooth variational principle with application to subdifferentiability[J]. Tran Amer Math Soc, 1987, 303: 517—527.

[7] ZHU Q J. Clarke - Ledyaev mean - value inequalities in

smooth Bananch spaces [J]. Nonlinear Anal TMA, 1998, 32:315—324.
[8] CLARKE F H, LEDYAEV Y S. Mean - value inequalities in Hilbert space[J]. Tran Amer Math Soc, 1994, 344:307—324.
[9] JEYAKUMAR V. Composite nonsmooth programming with Gateaux differentiability [J]. SIAM J Opti, 1991, 1:30—41.
[10] JEYAKUMAR V, YANG X Q. Convex composite multi - objective nonsmooth programming[J]. Math Prog Series A, 1993, 59: 325—343.
[11] **杨富春,何青海,聂彩仁. 光滑** Banach **空间中一类数学规划问题的最优必要条件**[J]. **应用泛函分析学报**, 2003, 5(3):265—270.

Subdifferential rule for sum of functions in Hilbert space and applications

SHAO Yuan-fu, LI Cheng-lin
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: This paper gives the subdifferential "local" sum rule for the sum of nonsmooth functions in Hilbert space and its application. With it, it gets the necessary optimality conditions for a kind of generalized and composite optimization problem.

Key words: proximal subdifferential; proximal normal cone; sum rule; composite optimization problem; necessary optimality conditions

* *

(上接第 464 页)

Reference:

[1] CHEN Jing-lian. Special Matrices [M]. Beijing: TsingHua Press, 2001.
[2] LI B, LI L. An iterative criteria for H - matrix[M]. Linear Algebra Appl, 1998, 271: 179—190.
[3] LI L. Gauss criteria and its applications for H - matrix [J]. J Applied Mathematics, 1998, 21(1):155—158.
[4] LI L. Convergence of asynchronous iteration with arbitrary splitting form[J]. Linear Algebra Appl, 1989, 113:119—127.
[5] OJIRO K, NIKI H, USUI M. A new criterion for the H - matrix property[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 150:293—302.
[6] KOHNO T, NIKI H, SAWAMI H, et al. An iterative test for H - matrix[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 115:349—355.

判定 H - 矩阵的一个迭代算法的修正*

李耀堂, 张 讯
(云南大学 数学系, 云南 昆明 650091)

摘要: **随着** H - **矩阵在科学与工程计算中的广泛应用,如何判定一个给定矩阵是否为** H - **矩阵引起了许多研究者的兴趣. 本文对一个现有判定** H - **矩阵的迭代算法进行了修正,得到了一个新的迭代算法. 数值算例表明该算法是有效的.**

关键词: H - **矩阵;对角占优矩阵;迭代算法**

* **作者简介**:李耀堂(1958 -),男,陕西人,博士,教授,主要从事矩阵计算方面的研究.