云南大学学报 (自然科学版), 2003, 25 (2): 85~ 87　　CN 53- 1045/N　ISSN 0258- 7971
Journal of Yunnan University

一类带交易费用的含参数 Black- Scholes 模型*

杨富春, 聂彩仁, 何青海
(云南大学 数学系, 云南 昆明　650091)

摘要: 对 Black- Scholes 模型, 讨论其在带有参数 α 及存在交易费用情形下的推广, 得到了带有参数 α 及存在交易费用的衍生证券定价模型.

关键词: Black- Scholes 模型; 证券组合; 交易费用; Leland 模型
中图分类号: F 830.9; O 241.82　　文献标识码: A　　文章编号: 0258- 7971(2003)02- 0085- 03

衍生证券估值的 Black- Scholes(简称 BS) 模型, 无论在理论上还是在实践中都非重要, 并深刻地影响着市场行为, 它是数理金融学研究的一个中心论题.

众所周知, BS 模型对市场作了一系列假设, 为了表达方便, 以下简称 BS 假设: ①股票遵循 μ, σ 为常数的随机过程 ($dS = \mu S dt + \sigma S dB$) ; ②允许使用全部所得买空衍生证券; ③没有交易费用和税收, 所有证券都是高度可分的; ④在衍生证券的有效期内, 没有对标的资产的红利支付; ⑤不存在无风险套利机会; ⑥证券交易是连续的; ⑦无风险利率是常数且对所有到期日都相同(参见文献[1~ 3]). 现在已有许多文献研究放宽其假设条件的期权定价模型, 如见文献[2]及所附参考文献.

在 BS 假设中, ①是一条过于理想化的假定. 事实上, 在 F. Black 和 M. Scholes 发表他们的期权定价模型以前, 就有一些事实表明, 资产收益不服从正态分布, 这也就是说资产价格不遵循波动率为常数的几何布朗运动. J. S. Cox 和 S. A. Ross 在文献[4]中就考虑了这个问题, 并给出了方差的弹性为常数的模型.

本文利用 J. C. Cox 和 S. A. Ross 的资产价格模型, 在允许资产回报是资产价格函数的情形下, 给出了带交易费用的含参数 Black- Scholes 模型.

1　模型推导

设 $\sigma(S)$ 为资产收益的标准差, 它是资产价格 S 的函数, 假设 $\sigma(S)$ 对价格 S 的弹性为常数 α, $\alpha \in [0, 1]$ 即

$$\frac{S\,d\sigma(S)}{\sigma(S)\,dS} = \alpha,$$

由上式得 $\sigma(S) = \bar{\sigma} S^{\alpha}$ ($\alpha, \bar{\sigma}$ 为常数). 考虑资产价格遵循的随机过程

$$dS = \mu S\,dt + \bar{\sigma} S^{\alpha} dB, \qquad \alpha \in [0, 1] \tag{1}$$

其中 B 为一维标准的布朗运动[5]. 用 Δt 表示时间增量, 相应的布朗运动的增量为 ΔB. 则 Δt 与 ΔB 满足关系式

$$\Delta B = \Phi\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t) \tag{2}$$

其中 Φ 为标准正态分布, 当 $\Delta t \to 0$ 时 $dB = \Phi\sqrt{dt}$, (1) 中的 α 决定了资产价格的变动对资产价格水平的敏感度. 当 $\alpha = 1$ 时, (1) 式即为 BS 模型的市场假设 ①[1].

现将 BS 模型中对市场的假设条件 ①变为 (1). 其余假设不变, 用 $V(S, t)$ 表示衍生证券的价格函数, 它是标的资产价格 S 和时间 t 的函数, 且关于 S 有二阶连续偏导数, 关于 t 有一阶偏导数, 则由泰勒展式有

$$\Delta V = V(S + \Delta S, t + \Delta t) - V(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + \frac{1}{2}\Delta S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + o(\Delta S^2), \tag{3}$$

由(1) 和(2) 我们有

$$(\Delta S)^2 = (\mu S \Delta t + \bar{\sigma} S^{\alpha} \Delta B + o(\Delta t))^2 = \mu^2 S^2 \Delta t^2 + 2\mu\bar{\sigma} S^{\alpha+1} \Delta t \Delta B +$$

---

* 收稿日期: 2002- 10- 11
基金项目: 云南省教育厅科研基金资助项目(02ZD023).
作者简介: 杨富春(1953-　), 男, 白族, 教授, 主要从事非光滑分析、金融数学等方面的研究.

$$\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha} \Delta B^2 + o\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right) =$$
$$\mu^2 S^2 \Delta t^2 + 2\mu\bar{\sigma} S^{\alpha+1} \Delta t(\Phi\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)) +$$
$$\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}(\Phi\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t))^2 + o\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right) =$$
$$\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha} \Phi^2 \Delta t + o\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (4)$$

为方便起见,将 $\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\Phi o\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right)$ 记为 $\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right)$.

将(4)代入(3),并令 Δt 趋于 0,在期望意义下,得

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mathrm{d}t \qquad (5)$$

(5)是相应于随机过程(1)的 Ito 公式.

将(1)中的 $\mathrm{d}S$ 代入(5)式,得

$$\mathrm{d}V = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}B, \qquad (6)$$

其离散形式为

$$\Delta V = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t + \bar{\sigma} S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial S}\Delta B + o(\Delta t), \qquad (7)$$

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \bar{\sigma} S^{\alpha}\Delta B + o(\Delta t). \qquad (8)$$

(7)式中的 $\Delta B = \Phi\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)$ 代表风险过程,选择适当的标的资产和衍生证券的组合就可以消除该项.

恰当的证券组合是

-1: 衍生证券;

$\frac{\partial V}{\partial S}$: 股票.

该证券组合的持有者卖空一分衍生证券,买入数量为 $\frac{\partial V}{\partial S}$ 的股票,定义组合的价值为 $\prod$. 考虑带交易费用的情形.

假设交易数量为 v 的资产,对买卖双方来说,交易费用与交易价值 S 成正比.

对于带有参数 α 的情形,我们对 Leland 的市场假设[2] 作如下修改:

⑧在每个微小的 Δt 时刻,组合都被修正;

⑨离散形式的随机过程为

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \bar{\sigma} S^{\alpha}\Phi\sqrt{\Delta t},$$

其中 Φ 是标准正态分布;

⑩交易费用与交易的标的资产的价值成正比. 如果以价格 S 买($v > 0$)或卖($v < 0$) v 份资产,则交易费用为 $k|v|S^{\alpha}$,其中 k 为常数,k 的值依不同投资者而定;

⑪组合的瞬时期望收益率等于短期无风险证券收益率 r.

由组合价值的定义,有

$$\prod = -V + \frac{\partial V}{\partial S}S, \qquad (9)$$

经过 Δt 时间后,组合的价值变化 $\Delta\prod$ 为

$$\Delta\prod = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + kS^{\alpha}|v|. \qquad (10)$$

取 $\beta = \frac{\partial V}{\partial S}$,在 t 时刻,资产数量为: $\beta = \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)$,经过 Δt 时间后,资产数量变为: $\frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, t + \Delta t)$,则交易的资产数量为

$$v = \frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, t + \Delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S, t).$$

因为 ΔS 和 Δt 都是很微小的,由泰勒展式有

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, t + \Delta t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + \Delta S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t) + o(\Delta t),$$

又因为

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \bar{\sigma} S^{\alpha}\Phi\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t),$$

所以有

$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)\Delta S + \Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t) + o(\Delta t) = \bar{\sigma} S^{\alpha}\Phi\sqrt{\Delta t}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \mu S\Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t) + o(\Delta t).$$

下面分 2 种情况讨论: 1° 以价格 S 买进 v 份资产,则 $v > 0$, $|v| = v$,也就有

$$E[kS^{\alpha}|v|] = E[kS^{\alpha}v] = kS^{\alpha}\left[\mu S\Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t)\right] + o(\Delta t). \qquad (11)$$

将(7),(8),(11)代入(10)得

$$E[\Delta\prod] = \left\{-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + kS^{\alpha}\left[\mu S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t)\right]\right\}\Delta t + o(\Delta t). \qquad (12)$$

因为(12)中不含风险项,经过 Δt 后,证券组合 $\prod$ 必

定无风险, 固由无套利假设, 该证券组合的瞬时收益率一定与其他短期无风险证券收益率相同, 于是有

$$E(\Delta\prod) = r\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - V\right)\Delta t, \tag{13}$$

其中 r 为无风险利率, 由方程(12), (13) 得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - kS^{\alpha}\left[\mu S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t)\right] + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{14}$$

2° 以价格 S 卖出 v 份资产, 则 $v < 0$, $|v| = -v$

$$E[kS^{\alpha}|v|] = E[-kS^{\alpha}v] = -kS^{\alpha}\left[\mu S\Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \Delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t)\right] + o(\Delta t). \tag{15}$$

将(7), (8), (15) 代入(10) 得

$$E[\Delta\prod] = \left\{-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - kS^{\alpha}\left[\mu S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t)\right]\right\}\Delta t + o(\Delta t). \tag{16}$$

因为(16) 中不含风险项, 经过 Δt 后, 证券组合 $\prod$ 必定无风险, 固由无套利假设, 该证券组合的瞬时收益率一定与其他短期无风险证券收益率相同, 于是有

$$E(\Delta\prod) = r\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - V\right)\Delta t, \tag{17}$$

由方程(16), (17) 得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + kS^{\alpha}\left[\mu S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S, t)\right] + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{18}$$

方程(14), (18) 分别为 2 种情况下得出的期权定价模型.

2　模型的一个特例

对于不存在交易费用的情形, 此 $k = 0$ 时, 则方程(14) 和(18) 都变为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \tag{19}$$

方程(19) 与文献[5] 中的结论相同.

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of option and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economics, 1973, 81: 637—659.

[2] WILLMOTT P. Derivatives-the theory and practice of financial engineering[M]. West Sussex: John Wiley & Sons, 1988.

[3] JOHN C H. Options, futures and other derivative securities[M]. Beijing: Huaxia Publishing House, 1998.

[4] COX J C, ROSS S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Jourmal of Financial Economics, 1976, (3): 145—166.

[5] ZHANG Shun-ming, DENG Min. Generalization of the black-scholes model of security valuation[J]. Mathematics in Economics, 1999, 16(2): 13—20.

[6] 聂彩仁, 何树红. 一类广义的 Black- Scholes 模型的数值解[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2002, 24(4): 241—244.

[7] 李晋枝, 乔克林, 何树红. 限制卖空条件下的证券投资组合[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2002, 24(6): 405—408.

A generalization of Black-Scholes model with parameter and transaction costs

YANG Fu-chun, NIE Cai-ren, HE Qin-hai

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: The Black-Scholes model was generalized. A derivative securities pricing model with parameter and transaction costs was given.

Key words: Black-Scholes model; security portfolio; transaction costs; Leland model