云南大学学报(自然科学版), 2002, 24(4): 253~255 CN 53-1045/N ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

生产函数模型中参数的Minimax估计及应用*

石 磊[1], 李兴绪[1], 陈 飞[1], 王 刚[2], 陈 宏[1]
(1. 云南大学 统计系, 云南 昆明 650091; 2. 云南财贸学院, 云南 昆明, 650221)

摘要: 生产函数模型中参数的估计问题是生产函数建模和统计推断的重要环节, 也是用于测算科技进步的重要手段. 在实际问题中, 由于数据的原因, 用传统的最小二乘估计得到的结果与实际解释会产生较大的偏差. 文章介绍有效利用先验信息进行模型参数估计的Minimax估计方法, 并给出了一种迭代算法, 同时通过实例进行了分析和说明.

关键词: 生产函数模型; 科技进步贡献; Minimax参数估计
中图分类号: F 224.0 文献标识码: A 文章编号: 0258-7971(2002)04-0253-03

生产函数表示在一定的时间和技术条件下, 生产要素的某种组合所可能产出的最大产量. 考虑两种生产要素, 即资本和劳动投入的生产函数

$$Q = f(K, L), \qquad (1)$$

其中, Q 代表产出, K, L 分别代表资本和劳动的投入. 规模报酬: 在一定条件下, 生产规模按相同比例变动而引起产出量的变动比例, 即

$$R(\lambda) = \frac{f(\lambda K, \lambda L)}{f(K, L)} \qquad \lambda > 0, \qquad (2)$$

当 $R(\lambda) = \lambda$ 时, 称为规模报酬不变; 当 $R(\lambda) > \lambda$ 时, 称为规模报酬递增; 当 $R(\lambda) < \lambda$ 时, 称为规模报酬递减.

生产函数有多种形式, 其中应用得最为广泛的是Cobb-Douglas生产函数(C-D生产函数). 考虑其广义形式, 则有

$$Q = f(K, L) = A_0 e^{rt} K^{\alpha} L^{\beta}, \qquad (3)$$

式中 A_0 为基期的技术进步水平, t 表示时间, α 和 β 分别表示资本和劳动的产出弹性, 且 $0 < \alpha, \beta < 1$, r 表示科技进步系数.

(3) 中未知参数的估计是进行统计推断的基础. 一般情况下, 通常采用最小二乘估计. 将(3)式线性化, 两边取对数得

$$\ln Q = \ln A_0 + rt + \alpha \ln K + \beta \ln L, \qquad (4)$$

考虑规模报酬不变的假设, 即 $\alpha + \beta = 1$, 有

$$\ln Q = \ln A_0 + rt + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L,$$

化简后可得

$$\Rightarrow \ln(Q/L) = \alpha_0 + rt + \alpha \ln(K/L), \qquad (5)$$

其中 $\alpha_0 = \ln(A_0)$, 左边 Q/L 即为劳动生产率, 右边 K/L 为劳动资金装备系数. 其数学意义表示劳动生产率分别是技术进步水平与劳动资金装备系数的函数. (5) 是一个2变量的线性回归模型, 因此只要用最小二乘估计即可给出参数 r, α, β 的估计.

但在实际中, 由于数据波动较大或存在误差, 用最小二乘估计法得到的参数估计未能给出很好的解释. 下面我们考虑一个实际问题: 为研究云南省昭通地区工业的科技进步贡献, 收集了1978年至1999年间的数据, 如表1所示. 其中产出 = 工业增加值, 资本 = 固定资产 + 流动资产年平均余额, 劳动投入 = 工业从业人员.

令 $y_i = \ln(Q_i/L_i)$, $x_i = \ln(K_i/L_i)$, 其中 Q_i, K_i, L_i 分别表示在第 i 年份工业增加值, 资金及劳动从业人员的数值. 线性回归模型为

$$y_i = \alpha_0 + rt_i + \alpha x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \cdots, 22$$

参数的LSE分别为: $\alpha_0 = 2.9176$, $r = -0.0002$, $\alpha = 0.7189$. 即这一时期的科技进步水平为负值. 这一结果显然与实际情况是不相符的.

* 收稿日期: 2002-03-02
基金项目: 云南省自然科学基金资助项目(2000A003M); 云南财贸学院课题基金项目.
作者简介: 石 磊(1965-), 男, 汉族, 云南人, 教授, 博士生导师, 主要从事应用概率统计的研究.

表 1 云南省昭通地区工业 1978~1999 年期间历史数据资料

Tab. 1 Historical data of Zhaotong industry during 1978—1999

序号	年份	工业增加值/万元	资本/万元	工业从业人员/万人
1	1978	13 822	8 602	5.084 0
2	1979	16 892	11 266	5.141 5
3	1980	16 850	13 356	5.501 3
4	1981	19 201	14 202	4.983 3
5	1982	18 047	17 544	5.054 2
6	1983	22 426	21 591	5.609 7
7	1984	26 327	22 497	5.812 4
8	1985	30 287	28 225	5.812 4
9	1986	27 345	34 980	6.012 8
10	1987	37 486	41 435	6.213 8
11	1988	48 636	51 333	6.493 7
12	1989	70 127	84 200	6.507 1
13	1990	84 173	117 181	6.564 8
14	1991	83 759	151 554	6.569 1
15	1992	110 015	167 001	6.572 6
16	1993	166 730	177 809	6.682 5
17	1994	186 514	211 374	6.699 4
18	1995	221 593	293 646	6.983 8
19	1996	222 041	430 719	6.991 5
20	1997	243 462	453 189	7.289 2
21	1998	266 006	595 133	7.322 3
22	1999	225 124	658 700	7.354 7

1 Minimax 线性估计(MILS)

这一结果的出现一方面是数据在部分时间段上波动较大,特别是 1999 年,经济的下滑较为严重(表 1);另一方面统计数据本身可能存在误差.那么在不修正数据本身的前提下如何进行有效而合理的估计呢?事实上,我们事先对某些参数存在明显的先验认知,如 $t>0$ 就是一个很明显的信息.这种先验信息的合理利用在估计理论中是很重要的内容.不失一般性,我们假设先验信息为 $0<r<a$,其中 a 为已知常数.下面我们将这一信息纳入考虑,建立如下的带不等式约束的线性模型

$$\begin{cases} y_i = \alpha_0 + rt_i + \alpha x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \cdots, 22 \\ 0 < r < a,\ E(\varepsilon_i) = 0,\ \mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

令 $r_0 = a/2$,由于 $0<r<a$ 可以表述为:$(r-r_0)^2 < a^2/4$.上式模型可以写为更一般的形式

$$\begin{cases} Y = X\beta + \varepsilon \quad \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I_n), \\ (\beta - \beta_0)' T(\beta - \beta_0) < k, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $Y = (y_1, \cdots, y_{22})'$, $X = (x_1, \cdots, x_{22})'$, $x_i = (1, t_i, x_i)'$, $i = 1, \cdots, 22$, $\beta_0 = (0, r_0, 0)'$, $T = \mathrm{Diag}(0, 1, 0)$, $k = a^2/4$.为了给出回归系数的估计,考虑 Minimax 准则:令 $R(\hat\beta, A) = \mathrm{tr}\{AE(\hat\beta - \beta)(\hat\beta - \beta)'\}$ 为二次损失函数,如 β 的线性估计函数 $\hat\beta^* = C^* Y$ 在一切线性估计类中满足

$$\min_{\hat\beta} \sup_{\beta \in B} R(\hat\beta, A) = \sup_{\beta \in B} R(\hat\beta^*, A)$$

则称 $\hat\beta^* = C^* Y$ 为 β 的 Minimax 线性估计(MILS).其中

$$B = \{\beta : (\beta - \beta_0)' T(\beta - \beta_0) < k\},$$

为此有如下结果[3]:

定理 1 在模型(7)中 β 的 Minimax 线性估计(MILS)为

$$\hat\beta^* = \beta_0 + (k^{-1}\sigma^2 T + X'X)^{-1} \cdot X'(y - X\beta_0), \quad (8)$$

在(6)的特殊情形下,$\beta_0 = (0, r_0, 0)'$, $T = \mathrm{Diag}(0, 1, 0)$, $k = a^2/4$.上述定理的结果可进一步化简为

$$\hat\beta^* = \hat\beta - \frac{(X'X)^{-1} d(\hat r - r_0)}{k/\sigma^2 + d'(X'X)^{-1} d}, \quad (9)$$

其中 $\hat\beta = (X'X)^{-1} X'Y$, $d = (0, 1, 0)'$ (具体证明见文献[3]).

但在(9)式中 σ^2 是未知的,为了能同时给出参数的估计,我们建议采用迭代算法,并由下列 4 个步骤完成:

(1) 计算 $s^2_{(0)} = Y'(I_n - X(X'X)^{-1}X')Y/(n-p)$,将其作为 σ^2 的估计带入(9)计算 $\hat\beta^*_{(0)}$.

(2) 计算 $s^2_{(1)} = (Y - X\hat\beta^*_{(0)})'(Y - X\hat\beta^*_{(0)})/(n-p)$,将其作为 σ^2 的估计带入(9)计算 $\hat\beta^*_{(1)}$.

……

(3) 计算 $s^2_{(i+1)} = (Y - X\hat\beta^*_{(i)})'(Y - X\hat\beta^*_{(i)})/(n-p)$,将其作为 σ^2 的估计带入(10)计算 $\hat\beta^*_{(i+1)}$.

(4) 重复(1),(2)的过程,直至

$$T = (\hat\beta^*_{(i+1)} - \hat\beta^*_{(i)})'(\hat\beta^*_{(i+1)} - \hat\beta^*_{(i)}) + (s^2_{(i+1)} - s^2_{(i)})^2 < c,$$

其中 c 为估计精度.

2 实际应用

下面我们用表 1 的数据进行计算和分析.由于昭通地区工业在云南省属中等水平,因此取 $a = 0.3$,估计精度 $c = 0.000\,01$.参数的 MILE 估

计结果列于表 2 中. 其技术进步水平为 5%, 资本及劳动弹性系数分别为 46.68% 及 53.32%. 由此计算出的这一期间科技、资本及劳动贡献分别为 17.97%, 75.37%, 6.66%. 这一结果与云南省的平均水平相比较, 是符合昭通地区实际情况的.

表 **2**　参数的 **Minimax** 估计及迭代精度

Tab. 2 Minimax estimators of parameters and iterative precision

回归系数			β	方差 σ^2	迭代精度 T
α_0	r	α			
-94.608	0.050	0.4668	0.5332	0.0330	0.00001

此外我们还计算出这一时期不同阶段科技进步、资本及劳动的贡献率, 结果列于表 3 中, 供参考.

3　讨　论

科技进步贡献率的测算是衡量一个地区经济发展质量的重要内容. 而生产函数及其参数估计是一个重要的工具和手段. 在实际中, 我们往往发现由于数据的原因, 传统的方法不能得到满意的结果, 而对数据的修正又带有太多的主观因素或难以操作, 此时先验信息的应用无疑是一种行之有效的方法. 本文在实际应用中提出了用 Minimax 估计方法处理当出现 $r<0$ 时的估计问题, 取得了较好的应用效果. 这一方法还可以应用于一些较为复杂的生产函数模型. 科技进步贡献率的计算方法相关的文献较多, 这里没有列出. 此外, 在一定条件下, 该方法中 a 的选择没有太大的影响. 计算表明, 当取 $a=0.3$ 及 $a=0.5$ 时所得的收敛结果是很接近的.

表 **3**　不同时期科技进步对工业经济增长贡献率

Tab. 3 Contributed rates of science and technology on economic growth of industry

年　份	Ea	Ek	El
1978~1988	0.2205	0.6809	0.0985
1988~1998	0.2654	0.6998	0.0348
1978~1998	0.2473	0.6911	0.0616
1978~1999	0.1797	0.7537	0.0666
1980~1998	0.2858	0.6628	0.0513
1980~1999	0.2154	0.7286	0.0560
1985~1998	0.2622	0.6891	0.0487
1990~1998	0.2730	0.6796	0.0474
1990~1999	0.0868	0.8546	0.0586
1985~1990	0.2643	0.6778	0.0579
1990~1995	0.5282	0.4407	0.0311
1980~1985	0.3470	0.6055	0.0474
1978~1996	0.2633	0.6796	0.0571

参考文献:

[1] 贺　铿. 计量经济学教程[M]. 北京: 中国统计出版社, 2000.

[2] 伍超标. 经济计量学导论[M]. 北京: 中国统计出版社, 1998.

[3] TOUTENBYRG H. Prior information in linear model [M]. New York: Chichester Wiley, 1982.

Minimax estimation of parameters in production function model and its applications

SHI Lei[1], LI Xing-xu[1], CHEN Fei[1], WANG Gan[2], CHEN Hong[1]

(1. Department of Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China;

2. Yunnan Finance and Trade Institute, Kunming 650221, China)

Abstract: The parameter estimation in product function model is an important step in model building and statistical inference of production function, and also is a main tool for measuring science and technology development. However, in practice there are exist some errors between real explanation and computing result by using classical least square estimation due to the source of data. A Minimax estimation method is introduced in production function model by using prior information, and a iterative algorithm is given. Finally a real data is used for illustration.

Key words: production function; contribution of science and technology; Minimax estimation