文章编号: 1007-2985(2008)05-0001-04

具有非对称项 p-Laplace 方程的无穷多解*

耿　堤, 刘迪生
(华南师范大学数学科学学院, 广东 广州　510631)

摘　要: 讨论了有界区域上一类具有非对称扰动项的 p-Laplace 方程. 利用对应的 Laplace 方程大 Morse 指标, 给出了该问题变分泛函极小极大值序列的一个下界估计, 这一个估计在一定范围内优于已有的结论. 进而得到了无穷多个弱解的存在性.

关键词: p-Laplace 算子; 大 Morse 指标; 非奇性扰动; 无穷多解
中图分类号: O175.25　　文献标识码: A

1　问题的提出和主要结果

考虑 $\mathbf{R}^N$ 中有界光滑区域 Ω 上的 p-Laplace 方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u + f(x) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N > p > 1$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是所谓的 p-Laplace 算子.

p-Laplace 方程在非齐次扰动情形下的多解问题起源于 Laplace 方程的多解问题, 其背景来源于非线性量子力学. Rabinowitz P H[1]、Bahri A 等[2] 及 Struwe M[3] 利用对称泛函的扰动理论首先讨论了 Laplace 方程的这类问题. Bahri A 等[4] 和 Tanaka K[5] 运用 Morse 指标理论给出了迄今为止最好的结果. Garcia Azorero J P 等[6] 首先将 Laplace 方程非齐次扰动情形下的无穷多解的结果推广到 p-Laplace 方程中, 在 p-Laplace 方程的情形, 因为在 Banach 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中缺少与 Hilbert 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中相应的结构, 所以 Morse 指标理论不能直接应用于这类方程, 相应的多解问题一直未能达到与 Laplace 方程类似的最好结果. 笔者利用 2 种方程之间的关系, 用 Laplace 方程的大 Morse 指标来估计 p-Laplace 方程相应的临界值的增长阶, 给出了 p-Laplace 方程在非齐次扰动情形下无穷多解的存在性, 这个结果在一定程度上改进了文献[6] 的结果.

定理 1　设 $f(x) \in C(\bar\Omega)$ 且 $2 \leq p < q < \min\{\bar q, \frac{2N}{N-2}\}$, 其中 $\bar q$ 是如下方程

$$\frac{q}{q-1} = \frac{p}{N} \cdot \frac{2q - N(p-2)}{2(q-p)} \tag{2}$$

的大正根, 则问题(1) 存在无穷多个弱解 $\{u_k\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, 对应变分泛函的临界值趋于正无穷大.

问题(1) 的弱解对应于如下 C^1 泛函当 $\lambda = 1$ 时的临界点:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x)u\,\mathrm{d}x \quad (u, \lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times [0, 1]. \tag{3}$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的等价范数为 $\|\nabla u\|_p$. 当 $\lambda = 0$ 时, $J_0(u)$ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的偶泛函. 此外也容易看出, 当 $p \leq 2$ 时, $p^* = Np/(N-p) \geq 2^* = 2N/(N-2)$. 因此在定理 1 的条件下, 泛函 $J_\lambda(u)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中满足 Palais-Smale 条件.

* 收稿日期: 2008-02-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371045); 广东省自然科学基金资助项目(7005795)
作者简介: 耿　堤(1956-), 男, 天津人, 华南师范大学数学科学学院教授, 博士, 主要从事偏微分方程和非线性泛函分析研究.

2 某些预备性结果

为得到 $J_1(u)$ 的一列临界值,引入如下结果:对于 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$,可知(例如参见文献[7])Schauder 基是存在的.在 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中,Sobolev 不等式成立,而在由 Schauder 基的前 k 个函数所生成空间的补空间中,有更进一步的结论:

引理 1[7] 对于有界且具有锥性质的区域 Ω,在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中存在 1 组 Schauder 基 $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$,使得对于 $q\in[p,p^*)$,存在正常数 $C_1>0$,当 $u\in\overline{\operatorname{span}}\{w_k,w_{k+1},\cdots\}$ 时,

$$C_1 k^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{4}$$

设 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中满足上述结果的 1 组 Schauder 基为 $\{w_k\}$,$\{w_k\}$ 也是 $H_0^1(\Omega)$ 中的 Schauder 基(参见文献[7]第 2 章和第 4 章).记

$$E_k=\operatorname{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_k\},E_k^{\perp}=\overline{\operatorname{span}}\{w_k,w_{k+1},\cdots\}.$$

再分别引入映射簇和极小极大值序列如下:

$$\Gamma_k(p)=\{\gamma\in C(E_k\cap B_{R_k}(0),W_0^{1,p}(\Omega));\ \gamma \text{ 是奇映射, 且 } \gamma|_{E_k\cap\partial B_{R_k}(0)}=\mathrm{id}\},$$

$$c_k=\inf_{\gamma\in\Gamma_k(p)}\max_{u\in E_k\cap B_{R_k}(0)}J_0(\gamma(u)),$$

其中 R_k 是一列趋于无穷的正数,使得当 $u\in E_k$ 且 $\|u\|\geqslant R_k$ 时,成立 $J_0(u)<0$.

引理 2 对每一个充分大的 k,存在 $\rho_k>0$ 及与 k 无关的正常数 C_2,使得

$$J_\lambda(u)\geqslant C_2 k^{\frac{pN-q(N-p)}{N(q-p)}}\quad\forall u\in E_k^{\perp}\cap\partial B_{\rho_k}(0).$$

证明 当 $u\in E_k^{\perp}$ 时,利用引理 1 中的结果可以估计 $J_0(u)$ 如下:

$$J_0(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{1}{q}\|u\|_q^q\geqslant\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-Ck^{q/p^*-1}\|\nabla u\|^q.$$

当取 $\|\nabla u\|_p=\rho_k=(k^{1-\frac{q}{p}+\frac{q}{N}}/(2qC))^{1/(q-p)}$ 时,对所有充分大的 k 及 $u\in E_k^{\perp}\cap\partial B_{\rho_k}(0)$,有

$$J_0(u)\geqslant[\frac{1}{2p}(2qC)^{-\frac{p}{q-p}}-C(2qC)^{\frac{-q}{q-p}}]k^{(q/p^*-1)\frac{p}{q-p}}-C\geqslant C_2 k^{\frac{qp}{N(q-p)}-1},$$

其中 C_2 是与 k 无关的正常数.适当地调整上面的证明过程以及常数 C_2 的大小,不难得知上述结果对 $J_\lambda(u)$ 依然成立.引理 2 结果得证.

注记 1 由引理 2 的结果,利用通常的 Borsuk 定理,也不难得到

$$c_k\geqslant C_2 k^{\frac{pN-q(N-p)}{N(q-p)}}. \tag{5}$$

关于 c_k 这个估计,当 $p=2$ 时,由 Rabinowitz P H 利用 Hilbert-Courant 建立的关于 Laplace 算子特征值的增长阶所得到;Garcia J P 等[6]在 $\Omega=[0,1]^N$ 的特殊情形下建立了 $p\neq2$ 时的类似估计.

3 主要定理的证明

首先在 $p\geqslant2$ 的条件下建立一个优于(5)式的估计:

引理 3 设 $2\leqslant p<q<2^*$,存在与 k 无关的正数 C_3,使得对所有充分大的 k,

$$c_k\geqslant C_3 k^{\frac{p}{N}\cdot\frac{2q-N(q-2)}{2(q-p)}}.$$

证明 当 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $J_0(u)\geqslant0$ 时,利用 $2\leqslant p<q<2^*$,有

$$J_0(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\geqslant[(\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}-(\frac{1}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}]^{\frac{p}{2}}\geqslant$$

$$[C(|\Omega|)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-(\frac{1}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}]^{\frac{p}{2}}. \tag{6}$$

其中第 2 项利用插值不等式和 Sobolev 不等式可以处理如下:

$$[\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x]^{\frac{2}{p}}\leqslant[(\int_\Omega|u|^{2^*}\mathrm{d}x)^{q\frac{1-\theta}{2^*}}(\int_\Omega|u|^r\mathrm{d}x)^{q\frac{\theta}{r}}]^{\frac{2}{p}}\leqslant$$

$$[(S\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{q\frac{1-\theta}{2}}(\int_\Omega|u|^r\mathrm{d}x)^{q\frac{\theta}{r}}]^{\frac{2}{p}}\leqslant$$

$$(S\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{\frac{2q}{p}\cdot\frac{1-\theta}{2}}(\int_\Omega|u|^r\mathrm{d}x)^{\frac{2q}{p}\cdot\frac{\theta}{r}}. \tag{7}$$

这里选取 r 和 θ 满足下面的关系:$r>1,0<\theta<1$ 且

$$q\frac{1-\theta}{2^*}+q\frac{\theta}{r}=1,\ \frac{2q}{p}\cdot\frac{1-\theta}{2}+\frac{2q}{p}\cdot\frac{\theta}{r}=1. \tag{8}$$

由此可以解得

$$= 1 - \frac{N(p-2)}{2q}, r = 2\frac{2q - N(p-2)}{2p - N(p-2)},$$

其中因为 $p < q < 2^*$, 有 $p > N(p-2)/2$, 所以 > 0.

利用(8) 式中的第 2 式, 可以将(7) 式写为

$$[\quad |u|^q dx]^{\frac{2}{p}} \quad (S \quad | \quad u|^2 dx)^{\frac{2q}{p}\frac{1-}{2}}(\quad |u|^r dx)^{\frac{2q}{p}\frac{}{r}}$$

$$| \quad u|^2 dx + C(\ ) \quad |u|^r dx, \tag{9}$$

其中 S 是 Sobolev 嵌入 $W^{1,p}(\ )$ $L^{p^*}(\ )$ 的最佳常数. 代入到(6) 式中并取适当的 , 可以得到

$$J_0(u) \quad [C(| \quad |) \quad | \quad u|^2 dx - (\frac{1}{q} \quad |u|^q dx)^{\frac{2}{p}}]^{\frac{p}{2}}$$

$$[\frac{C(| \quad |)}{2} \quad | \quad u|^2 dx - C(\ ) \quad |u|^r dx]^{\frac{p}{2}}$$

$$K(\frac{1}{2} \quad | \quad u|^2 dx - \frac{K}{r} \quad |u|^r dx)^{\frac{p}{2}} = K\, I(u)^{\frac{p}{2}}, \tag{10}$$

其中 $I(u) = \frac{1}{2} \quad | \quad u|^2 dx - \frac{K}{r} \quad |u|^r dx$. 而 K 和 K 是正常数, 不失一般性可设 $K \quad 1$ 和 $K \quad 1$.

引入一个过渡性的极小极大值序列:

$$c_k = \inf_{k(p) u} \max_{E_k \quad B_{R_k}(0)} I(\ (u)).$$

显然, (10) 式表明如果 c_k 足够大, 可使得对每个 $_k(p)$, 及满足

$$I(w_k) = \max_{u \quad E_k \quad B_{R_k}} I(\ (u))$$

的 w_k, 有 $I(w_k) > 0$ 及 $J_0(w_k) \quad 0$, 那么由(10) 式不难得到

$$c_k \quad K c_k^{\frac{p}{2}}. \tag{11}$$

另一方面, 在定理 1 的条件下, $q < 2^*$ 蕴涵 $r < 2^*$, 因此 $I(u)$ 在 $H_0^1(\ )$ 中满足 Palais-Smale 条件. 进而在 $H_0^1(\ )$ 中, $_k(p)$ $_k(2)$, 由此不难得到

$$c_k \quad b_k = \inf_{k(2) u} \max_{E_k \quad B_{R_k}(0)} I(\ (u)). \tag{12}$$

而由文献[4-5] 的结果可知 b_k 是 $I(u)$ 的临界值, 并且通过对对应的临界点的大 Morse 指标的估计, 可以得到

$$b_k \quad Ck^{\frac{2}{N}\frac{r}{r-2}} = Ck^{\frac{2}{N}\frac{2q-N(p-2)}{2(q-p)}}.$$

因此得到 $c_k \quad +$, 即(11) 式对所有充分大的 k 成立. 再由(12) 式得知

$$c_k \quad K b_k^{\frac{p}{2}} \quad Ck^{\frac{p}{N}\frac{2q-N(p-2)}{2(q-p)}}, \tag{13}$$

由此即可得到引理 3 的结论.

利用 H lder 不等式, 不难得到如下关系: 若 u 是 $J\ (u)$ 的临界点, 则

$$| \text{—} J\ (u)| = | \quad f(x)u dx | \quad C_1(|J\ (u)| + 1)^{\frac{1}{q}}, \tag{14}$$

其中 C_1 是仅与 f $_{C(\ )}$ 有关的常数.

仿照文献[8] 的方法, 将其推广到 Banach 空间中(只需在证明中将梯度场换为伪梯度场). 如果 $J_1(u)$ 只有最多有限个临界值, 那么利用(14) 式, 参见文献[9] 中的定理 2. 2 及其证明, 可以得到

$$c_{k+1} - c_k \quad C(c_{k+1}^{\frac{1}{q}} + 1).$$

因此可以建立如下的估计:

引理 4　若 $J_1(u)$ 只有最多有限个临界值, 则 $c_k \quad C_4 k^{\frac{q}{q-1}}$, 其中 C_4 是与 k 无关的正常数.

定理 1 的证明　结合上述 2 个引理的结果和文献[9] 的方法, 可以得到(1) 式无穷多解的存在性. 事实上, 若 $J_1(u)$ 只有最多有限个临界值, 结合引理 3 和引理 4 的结论, 有

$$C_3 k^{\frac{p}{N}\frac{2q-N(p-2)}{2(q-p)}} \quad c_k \quad C_4 k^{\frac{q}{q-1}}.$$

然而, 根据定理 1 的条件, 有

$$\frac{q}{q-1} < \frac{p}{N} \quad \frac{2q - N(p-2)}{2(q-p)},$$

由此可以导出矛盾. 即定理 1 的结论成立.

注记 2　在(13) 式的基础上得到的多解性结论在一定的范围内比文献[6] 的结果要强. 事实上, 根据文献[6] 中的结

论, 可知当 $q \quad (p, q_A)$ 时, 问题(1) 存在无穷多解, 其中 $q_A = q_A(p)$ 是下述方程的大根:

$$\frac{q}{q-1} = \frac{pN - q(N-p)}{N(q-p)}. \qquad (15)$$

(15) 式的右端正是引理 2 的估计式中所出现的指标. 注意到若记(2) 式中方程的大根为 $q = q(p)$, 则显然有

$$q(2) = \frac{2(N-1)}{N-2} > q_A(2).$$

因此, 存在某个 $p_0 \quad (2, + \quad]$, 使得当 $p \quad [2, p_0)$ 时, 成立 $q(p) > q_A(p)$. 设 $q_A(p) = q(p)$ 即可求出 p_0. 根据 $q_A(p)$ 和 $q(p)$ 分别满足的方程(2) 和(15), 可以得到

$$\frac{p}{N} \quad \frac{2q - N(p-2)}{2(q-p)} = \frac{pN - q(N-p)}{N(q-p)}. \qquad (16)$$

而(16) 式等价于 $2q = p^2$. 再代回到 $q_A(p)$ 或 $q(p)$ 所满足的方程, 可以得知 p_0 应该满足如下的四次方程:

$$p^4 - 2Np^3 + 2(2N-1)p^2 + 2Np - 4N = 0.$$

这个方程有 2 个实根分别位于区间$(-2, -1)$ 和$(1, 2)$ 中. 当 $N = 3$ 时, 无大于 2 的实根, 即 $p_0 = +$. 当 $N \quad 4$ 时, 另外 2 个实根位于区间$(2, 2N)$ 中. 大于 2 的第 1 个实根即是 p_0, 且有 $p_0 \quad (2, 3)$. 因此得到结论: 在定理 1 的条件下, 当 $p \quad (2, p_0)$ 且 $q \quad (p, q(p))$ 时, 问题(1) 存在无穷多弱解. 所得到的这个结果强于文献[6] 中相应的结论, 因为 $(p, q_A(p)) \quad (p, q(p))$.

参考文献:

[1] RABINOWITZ P H. Multiple Critical Points of Perturbed Symmetric Functions [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 272: 753-770.

[2] BAHRI A, BERESTYCKI H. A Perturbation Method in Critical Point Theory and Applications [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1981, 267: 1-32.

[3] STRUWE M. Variational Methods [M]. Beijing: Spriger-Verlag, 1996.

[4] BAHRI A, LIONS P L. Morse Index of Some Min-Max Critical Points I- Applications in Multiplicity Results [J]. Commu. Pure Appl. Math., 1998, 41: 1 027-1 037.

[5] TANAKA K. Morse Indices at Critical Points Related to the Symmetric Mountain Pass Theorem and Applications [J]. Commun. in Partial Differential Equations, 1989, 14(1): 99-128.

[6] GARCIA AZORERO J P, PERAL ALONSO I. Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent or with a Nonsymmetric Term [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1991, 323(2): 877-895.

[7] TRIEBEL H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators [M]. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1978.

[8] BOLLE P. On the Bolza Problem [J]. J. Diff. Equations, 1999, 152(2): 274-288.

[9] BOLLE P, GHOUSSOUB N, TEHRANI H. The Multiplicity of Solutions in Non-Homogenous Boundary Value Problems [J]. Manu. Math., 2000, 101: 325-350.

Infinitely Many Solutions of p-Laplacian Equations with a Nonsymmetric Term

GENG Di, LIU Di-sheng

(School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: A class of p-Laplace equation with a nonsymmetric term on a bounded domain is studied. By using the large Morse index of the corresponding Laplace equation, we give a growth estimate about the series of min-max values of associated functional for the problem. The estimate is better than the given result in some range. It is shown that the problem possesses infinitely many weak solutions.

Key words: p-Laplace equation; large Morse index; non-symmetric perturbation; infinitely many solutions

(责任编辑 向阳洁)