第 29 卷　第 4 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 29　No. 4
2008 年 7 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jul. 2008

文章编号: 1007-2985(2008)04-0027-03

《E^n 空间中 $k-n$ 型 Neuberg-Pedoe 不等式》一文的注记*

李小燕, 张垚
(湖南师范大学数学与计算机科学学院, 湖南 长沙　410081)

摘　要: 指出《E^n 空间中 $k-n$ 型 Neuberg-Pedoe 不等式》一文中的错误及产生错误的原因, 进一步给出了 E^n 空间中 $k-n$ 型 Neuberg-Pedoe 不等式的一个推广.

关键词: n 维单形; k 维子单形; 体积; Neuberg-Pedoe 不等式
中图分类号: O178　　　　文献标识码: A

最近, 文献[1] 试图对 n 维单形和 k 维子单形的体积给出 1 个推广, 其主要结论为下列 2 个定理.

定理 1　设 A 和 B 均为 n 维空间 E^n 中的 n 维单形($n \geqslant 3$), 且它们的 n 维体积分别是 V_A 和 V_B. 由 A 的 $k+1$ 个顶点 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{k+1}}$ 所张成的 k 维子单形的 k 维体积记为 $S_i(k)$, 由 B 的 $k+1$ 个顶点 $B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{k+1}}$ 所张成的 k 维子单形的 k 维体积记为 $F_j(k)$, 并记 $m = C_{n+1}^{k+1}$, 则有

$$\sum_{i=1}^{m} S_i^2(k)\Big(\sum_{j=1}^{m} F_j^2(k) - (n+1-k)F_i^2(k)\Big) \geqslant \varphi(n,k)(V_A V_B)^{\frac{2k}{n}}, \tag{1}$$

等号成立当且仅当 A 与 B 都是正则单形. 这里 $\varphi(n,k) = m[m-(n+1-k)]\Big[\Big(\frac{k+1}{k!^2}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big(\frac{n!^2}{n+1}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big]^{2k}$.

定理 2　在定理 1 的条件下, 设 $\theta \in (0,1]$, 则

$$\sum_{i=1}^{m} S_i^{\theta}(k)\Big(\sum_{j=1}^{m} F_j^{\theta}(k) - (n+1-k)F_i^{\theta}(k)\Big) \geqslant \psi(n,k,\theta)(V_A V_B)^{\frac{\theta k}{n}}, \tag{2}$$

等号成立当且仅当 A 与 B 都是正则单形. 这里 $\psi(n,k,\theta) = m[m-(n+1-k)]\Big[\Big(\frac{k+1}{k!^2}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big(\frac{n!^2}{n+1}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big]^{\theta k}$.

笔者将指出定理 1 中结论是错误的, 以及产生错误的原因. 同时, 对 n 维单形及 k 维子单形的体积给出不等式(2) 的推广与加强, 它们不同于文献[2] 中的结论且都是定理 2 及文献[3-5] 中结论的推广与加强.

1　定理 1 的商榷

首先指出, 不等式(1) 是不正确的, 事实上, 当 $n=3, k=2$ 时, 设 A 和 B 均为 E^3 中的正三棱锥 $A_1-A_2A_3A_4$, 其底面 $\triangle A_2A_3A_4$ 是边长为 a 的正三角形, 正三棱锥的高等于 ϵ, 则

$$S_1(2) = F_1(2) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,\ S_i(2) = F_i(2) = \frac{a}{2}\sqrt{\epsilon^2 + \frac{1}{12}a^2}\ (i=2,3,4),\ V_A = V_B = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\epsilon.$$

$$(1)\ 式左边 = \Big(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\Big)^2\Big[3\Big(\frac{a}{2}\sqrt{\epsilon^2+\frac{1}{12}a^2}\Big)^2 - \Big(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\Big)^2\Big] + 3\Big(\frac{a}{2}\sqrt{\epsilon^2+\frac{1}{12}a^2}\Big)^2 \cdot$$

---

* 收稿日期: 2008-02-15
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(06JJ2043); 湖南省教育厅科学研究项目(05C412)
作者简介: 李小燕(1963-), 女, 湖南常德人, 湖南师范大学数学与计算机科学学院副教授, 博士, 主要从事凸几何研究.

$$[(\frac{a}{2}\sqrt{\epsilon^2+\frac{1}{12}a^2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)^2]\to\frac{3a^4}{16}(\frac{a^4}{16}-\frac{3a^4}{16})+$$
$$\frac{a^4}{16}(\frac{a^4}{48}+\frac{3a^4}{16})=-\frac{a^8}{96}<0\qquad \epsilon\to 0.$$

$$(1)\text{ 式右边}=\varphi(3,2)(\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\epsilon)^2\to 0\qquad \epsilon\to 0.$$

可见不等式(1)是不正确的.上述反例同样说明文献[1]中引理1和引理2的结论不成立,另外文献[1]中推论1和推论2也不正确.

文献[1]中定理1产生错误的主要原因是证明该文引理1时有误.一般用微分法证明多元函数 $F(P)=F(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在区域 D 内一点 $P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)})$ 取最小值时,应证明下列3点:

(1) 驻点方程组 $F_{x_i}'(P)=0(i=1,2,\cdots,m)$ 在区域 D 内只有唯一解 $P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)})$;

(2) $F(P)$ 的各二阶偏导数在 P_0 的值组成的矩阵 $\boldsymbol{J}=(F_{x_ix_j}''(P_0))$ 为正定矩阵,从而 $F(P)$ 在 P_0 取最小值 $F(P_0)$;

(3) 证明 $F(P_0)$ 的值不大于 $F(P)$ 在 D 的边界上的所有值(这一步不能省略,反例见文献[6-7]).

文献[1]中证明引理1时,第(1)步仅指出但没有证明驻点是唯一的,且省略了必不可少的第(3)步.另外,第(2)步的证明也有错误,它试图通过证明矩阵 $\boldsymbol{J}=(F_{x_ix_j}''(P_0))$ 是对角元为正的严格对角占优矩阵,达到证明矩阵 $\boldsymbol{J}$ 正定的目的,但仅证明了 $\boldsymbol{J}$ 的每一个对角元比其他位置上的元素的绝对值均大就断言 $\boldsymbol{J}$ 是严格对角占优矩阵,这是不正确的,因为严格对角占优矩阵必须每一个对角元的绝对值均大于同行(或同列)其他非对角元绝对值之和[8-9].例如,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ 的对角元比其他位置上的元素的绝对值均大,但 $\boldsymbol{A}$ 不是正定矩阵(因为 $\det A=-25<0$).

从上可知,文献[1]中不仅定理1、推论1、推论2、引理1和引理2的结论不正确,而且证明该文引理1的依据和方法也是错误的.

2 加强的 $k-n$ 型 Neuberg-Pedoe 不等式

为了讨论的方便,如下均采用定理1中的假设条件和记号.

引理1[2] 设 $\alpha,\beta\in(0,1]$, $\gamma\in[0,n+1-k]$,则

$$S_\alpha S_\beta-\gamma S_{\alpha+\beta}=\sum_{i=1}^m S_i^\alpha(k)(\sum_{j=1}^m S_j^\beta(k)-\gamma S_i^\beta(k))\geqslant m(m-\gamma)\mu_{n,k}^{\alpha+\beta}V_A^{\frac{k(\alpha+\beta)}{n}},\tag{3}$$

等号成立当且仅当 A 是正则单形.

定理3 设 $\alpha,\beta\in(0,1]$, $\gamma\in[0,n+1-k]$,则

$$\sum_{i=1}^m S_i^\alpha(k)(\sum_{j=1}^m F_j^\beta(k)-\gamma F_i^\beta(k))\geqslant\frac{1}{2}m(m-\gamma)(\mu_{n,k}^{2\alpha}\frac{F_\beta}{S_\alpha}V_A^{\frac{2k\alpha}{n}}+\mu_{n,k}^{2\beta}\frac{S_\alpha}{F_\beta}V_B^{\frac{2k\beta}{n}})+R_1,\tag{4}$$

等号成立当且仅当 A 与 B 都是正则单形.这里:$S_\alpha=\sum_{i=1}^m S_i^\alpha(k)$, $F_\beta=\sum_{j=1}^m F_j^\beta(k)$, $\mu_{n,k}=\frac{\sqrt{k+1}}{k!}(\frac{n!}{\sqrt{n+1}})^{\frac{k}{n}}$, $R_1=\frac{\gamma}{2S_\alpha F_\beta}\sum_{i=1}^m(F_\beta S_i^\alpha(k)-S_\alpha F_i^\beta(k))^2\geqslant 0$.

证明 记

$$H_{AB}=\sum_{i=1}^m S_i^\alpha(k)(\sum_{j=1}^m F_j^\beta(k)-\gamma F_i^\beta(k))=S_\alpha F_\beta-\gamma\sum_{i=1}^m S_i^\alpha(k)F_i^\beta(k),$$

$$H_A=\sum_{i=1}^m S_i^\alpha(k)(\sum_{j=1}^m S_j^\alpha(k)-\gamma S_i^\alpha(k))=S_\alpha^2-\gamma\sum_{i=1}^m S_i^{2\alpha}(k),$$

$$H_B = \sum_{i=1}^{m} F_i^{\beta}(k)\Big(\sum_{j=1}^{m} F_j^{\beta}(k) - \gamma F_i^{\beta}(k)\Big) = F_{\beta}^2 - \gamma \sum_{i=1}^{m} F_i^{2\beta}(k),$$

则经过直接计算可得下列恒等式:

$$H_{AB} = \frac{1}{2}\Big(\frac{F_\beta}{S_\alpha} H_A + \frac{S_\alpha}{F_\beta} H_B\Big) + R_1.$$

利用不等式(3), 将 H_A 和 H_B 分别放大即得不等式(4), 并由引理 1 知等号成立当且仅当 A 与 B 都是正则单形.

在(4) 式中利用算术－几何平均值不等式, 得到如下推论:

推论 1　在定理 3 的假设条件和记号下, 有

$$\sum_{i=1}^{m} S_i^{\alpha}(k)\Big(\sum_{j=1}^{m} F_j^{\beta}(k) - \gamma F_i^{\beta}(k)\Big) \geqslant m(m-\gamma)\, \mu_{n,k}^{\alpha+\beta}\,(V_A^{\alpha} V_B^{\beta})^{\frac{k}{n}} + R_1, \tag{5}$$

等号成立当且仅当 A 与 B 都是正则单形.

在不等式(5) 中令 $\alpha = \beta$ 且 $\gamma = n+1-k$, 都能得到定理 2(文献[1] 中定理 2) 的一个加强如下:

推论 2　在定理 3 的假设条件和记号下, 有

$$\sum_{i=1}^{m} S_i^{\alpha}(k)\Big(\sum_{j=1}^{m} F_j^{\alpha}(k) - (n+1-k)\, F_i^{\alpha}(k)\Big) \geqslant m(m-\gamma)\, \mu_{n,k}^{2\alpha}(V_A V_B)^{\frac{2k\alpha}{n}} + R_3,$$

等号成立当且仅当 A 与 B 都是正则单形. 这里 $R_3 = \dfrac{n+1-k}{2S_\alpha F_\beta} \sum_{i=1}^{m} \big(F_\alpha S_i^{\alpha}(k) - S_\alpha F_i^{\alpha}(k)\big)^2 \geqslant 0.$

参考文献:

[1] ZHANG H F. The $k-n$ Type Neuberg-Pedoe Inequality in Eulidrean Space E^n [J]. Acta Math. Sinica, 2004, 47(5): 941－946.

[2] ZHANG Y. Also on Some High Dimensional Generalization and Strangthering of the Finsler-Hadwiger Inequality and the Neuberg-Pedoe Inequality [J]. J. Hunan Educational Institute, 1998, 16(2): 1－7.

[3] SU H M. Two Inequalities for the Simplexes [J]. Chinese Sci. Bull., 1987, 32(1): 1－3.

[4] CHEN J, MA Y. A Class of Inequalities Involving Two Simplicies [J]. J. Math. Res. Exp., 1989, 9(2): 282－284.

[5] LENG G S, TANG L H. Some Generalizations to Several Dimensional of the Pedoe Inequality with Applications [J]. Acta Math. Sinica, 1997, 40: 14－21.

[6] LING Z J. The Greatest Value and Least Value of Function of Several Variables [J]. Chinese Math. Bull., 1965, 10: 41－45.

[7] WANG L. Counter Examples in Real Analysis [M]. High Edu. Pub. House, 1989: 462－495.

[8] VARGA R S. On Recurring Theorems on Diagonal Dominance [J]. Linear Alegebra and Its Applications, 1976, 13: 1－9.

[9] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematics Sciences [M]. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979: 134－140.

Notes on the Article “The $k-n$ Type Neuberg-Pedoe Inequality” in Euclidean Space E^n

LI Xiao-yan, ZHANG Yao

(Mathematics and Computer Science College, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: The mistakes of the main results in *The $k-n$ Type Neuberg-Pedoe Inequality in Euclidean Space E^n* are shown, and the causes of these mistakes are pointed out. Moreover, a new $k-n$ type Neuberg-Pedoe inequalities in Euclidean Space E^n are given.

Key words: n-simplex; k-subsimplex; volume; Neuberg-Pedoe inequality

(责任编辑　向阳洁)