文章编号: 1007- 2985(2008)03- 0064- 04

基于Matlab仿真的扩散模型转移密度估计方法比较*

何 源[1], 陈 晖[2]
(1. 湖南农业大学信息科学技术学院, 湖南 长沙 410128; 2. 湖南大学工商管理学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 扩散模型目前被广泛的应用于现代电子、金融等领域用来描述变量的动态变化过程, 转移密度作为反映扩散模型特征的重要变量| 直是各国学者研究的重点, 随着Matlab功能的日益完善, 利用其强大的仿真和数值分析函数来定量研究扩散模型的转移密度, 从而寻找出最优的估计方法无疑具有重要的意义. 基于此, 通过利用Matlab仿真技术, 比较了2种估计扩散模型转移密度函数的方法, 即Euler法和Hermite法, 通过对存在闭端解的2个扩散模型的比较, 发现用Hermite扩展确实比Euler法能更好的估计扩散模型的转移密度函数, 在此基础上, 进| 步利用这2种方法估计了扩散模型的参数, 证明了Hermite法比Euler法能更好的识别模型参数, 减少估计中的错误.

关键词: 扩散模型; 转移密度; Matlab仿真
中图分类号: TP391 文献标识码: A

在实际系统中, 有许多系统都可以归结为扩散过程. 目前, 扩散模型已被广泛的用于现代电子、金融领域来描述各变量的动态变化过程, 转移密度是反应扩散模型特征以及进行模型估计的重要变量, 因此学者们对扩散模型转移密度估计方法进行了许多研究, 但扩散模型本身的复杂性限制了传统方法的有效性. 随着核心数值算法、界面设计、外部接口、应用桌面等诸多方面的极大改进, Matlab以其强大的数学运算能力、方便实用的绘图功能和语言的高度集成性, 逐渐发展成为一种通用的科技计算、图形交互系统和控制系统仿真的程序语言. 因此, 通过引入Matlab仿真技术对扩模型转移密度估计的方法进行比较, 从而得出不同估计方法有效性的结论具有理论与现实意义.

笔者主要是针对单要素模型的转移密度进行研究, 一个最一般的单要素模型可以写为:

$$dx_t = u(x_t, \theta)dt + \sigma(x_t, \theta)dw_t. \tag{1}$$

其中: u 为漂移函数; σ 为波动函数; dw_t 为维纳增量. 从理论上而言, 一个扩散模型主要的特征是通过其转移密度函数所表现出来的. 然而, 只有极少数模型的转移密度函数存在闭端解, 如: Vasicek[1], COX[2], 这就导致了对扩散模型的转移密度函数进行近似替代的研究. 由于扩散模型的马尔可夫性, 利用Euler法将其离散化, 其转移密度为:

$$p_x^{\mathrm{Euler}}(\Delta, x \mid x_0, \theta) = (2\pi\Delta\sigma^2(x_0, \theta))^{-1/2}\exp\{-(x - x_0 - u(x_0, \theta)\Delta)^2/2\Delta\sigma^2(x_0, \theta)\}. \tag{2}$$

除了Euler法, Lo[3] 采用解析方法求解扩散模型的Fokker-Planck偏微分方程, Durham和Gallant[4], Brandt-Santa[5] 采用了模拟最大似然法, 但这2种方法都无法得到一个转移密度函数的闭端解表达式. Aït-Sahalia[6-7] 利用Hermite展开获得了转移密度函数的闭端解表达式. 这种方法有较大的灵活性, 不需要样本间隔, 时间趋于0. 笔者将用Aït-Sahalia提出的这种较新的方法所获得的转移密度与存在闭端解方程的转移密度函数相比较, 同时与Euler方法比较.

* 收稿日期: 2008- 02- 16
作者简介: 何 源(1980-), 女, 湖南益阳人, 湖南农业大学信息科学技术学院教师, 硕士生, 主要从事数据库与数据挖掘、电子商务研究.

1　方法介绍

为了获得转移密度函数的近似闭端解, Aït-Sahalia 首先提出要将模型(1) 尾部标准化, 将把 x_t 转化为 y_t. y_t 服从以下方程:

$$dy_t = \left[\frac{u(\gamma^{-1}(y,\theta),\theta)}{\sigma(\gamma^{-1}(y,\theta),\theta)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\gamma^{-1}(y,\theta),\theta)\right]dt + dw_t. \tag{3}$$

x_t 和 y_t 的转移密度函数存在以下关系:

$$p_x(\Delta, x \mid x_0, \theta) = \frac{p_y(\Delta, \gamma(x,\theta) \mid \gamma(x_0,\theta), \theta)}{\sigma(\gamma(x,\theta),\theta)}. \tag{4}$$

对于单位扩散过程, 其转移密度可以用 Hermite 展开代替, 其形式见文献[7].

2　密度函数的比较

2.1 Vasicek 模型转移密度函数的比较

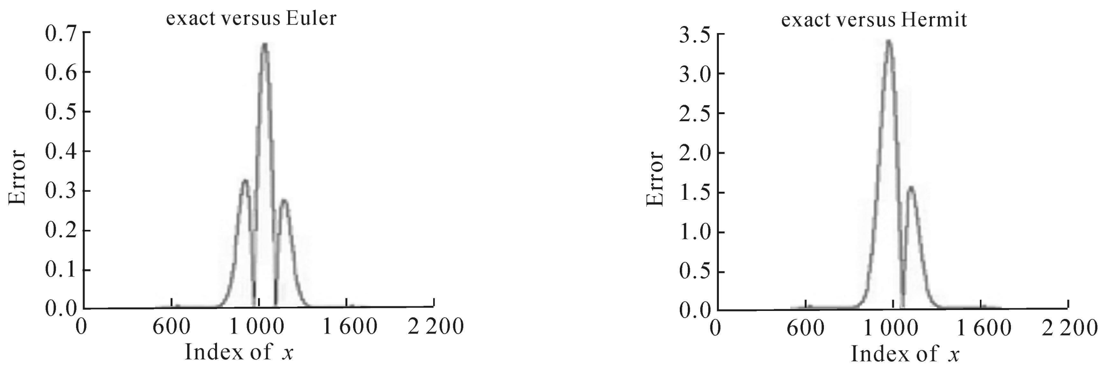
Vasicek 模型形式为: $dx_t = k(a - x_t)dt + \sigma dw_t$. 该方程的转移密度函数形式为:

$$p_x(\Delta, x \mid x_0, \theta) = (\pi\gamma^2/k)^{-1/2}\exp\{-(x - a - (x_0 - a)e^{-k\Delta})^2 k/\gamma^2\}. \tag{5}$$

其中 $\gamma^2 = \sigma^2(1 - e^{-2k\Delta})$. 模型转移密度用 Hermite 展开的表示为:

$$p_y(\Delta, y \mid y_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}}\exp\{-\frac{(y - y_0)^2}{2\Delta} - \frac{y^2 k}{2} + \frac{y_0^2 k}{2} + \frac{yak}{\sigma} - \frac{y_0 ak}{\sigma}\}. \tag{6}$$

以 x_0 为 0.1, Euler 近似法下的转移密度、Hermite 二阶展开下的转移密度分别与其真正的转移密相减, 得到图 1 结果.



a Euler 法下的偏差(单位为 0.1)　　b Hermite 法下的偏差(单位为 e-006)

图 1　不同方法下的 Vasicek 模型转移密度偏差

将 2 种近似法下的转移密度与其真正的转移密度相减求绝对值, 并将总偏差加以汇总, 得到 Euler 下总偏差为 105.1147, Hermite 下总偏差为 5.3911e-004. 因此, Hermite 方法在代替 Vasicek 模型的转移密度时明显优于 Euler 方法.

2.2 CIR 模型转移密度函数的比较

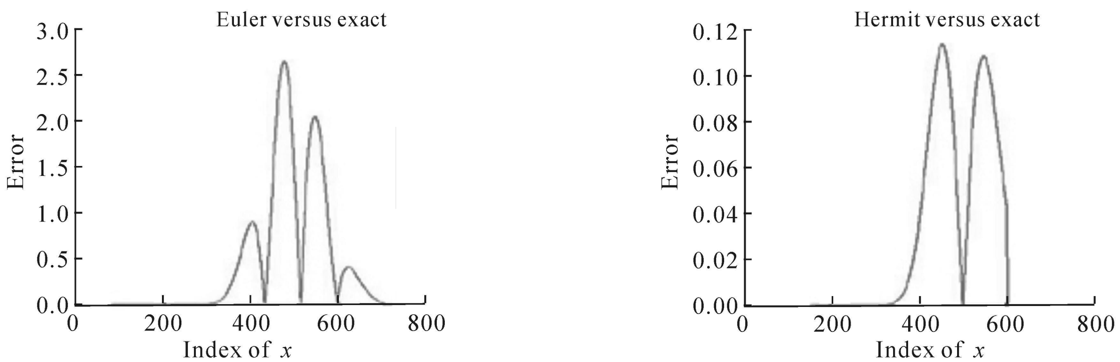
CIR 模型形式为: $dx_t = k(a - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dw_t$. 该模型的转移密度函数形式为:

$$p_x(\Delta, x \mid x_0, \theta) = c\exp(-u - v)(v/u)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}). \tag{7}$$

其中: $c = 2k/(\sigma^2(1 - \exp(-k\Delta)))$; $u = cx_0\exp(-k\Delta)$; $v = cx$; I_q 表示阶数为 q 的修正后的第一类贝塞耳分布. 其转移密度用 Hermite 展开的形式表示为:

$$p_y(\Delta, y \mid y_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}}\exp(-\frac{(y - y_0)^2}{2\Delta} - \frac{y^2 k}{4} + \frac{ky_0}{4}) y^{-(1/2)-(2ak/\sigma^2)} y_0^{(1/2)-(2ak/\sigma^2)}. \tag{8}$$

以 x_0 为 0.06, Euler 近似法下的转移密度、Hermite 二阶展开下的转移密度分别与其真正的转移密度相比(相减求绝对值), 得到图 2 结果.



a Euler 法下的偏差(单位为0.5)　　b Hermite 法下的偏差(单位为0.02)

图2　不同方法下的 Vasicek 模型转移密度偏差

将偏差加以汇总,得到 Euler 下总偏差为 307.236 9, Hermite 下总偏差为 16.164 5. 因此,Hermite 方法在代替 CIR 转移密度时也明显优于 Euler 方法.

3　利用2种方法估计期限结构模型参数

由于 Hermite 展开法比 Euler 法能更好地代替扩散模型的转移密度函数,因此将这种方法运用到估计利率期限结构模型中应该可以减少对参数的错误识别,下面利用 Matlab 的仿真技术模拟出以上2个方程的1 000个数据,用 Euler 和 Hermite 这2种方法进行估计.

用 Vasicek 方程模拟出的1 000个数据所生成的时间序列见图3.

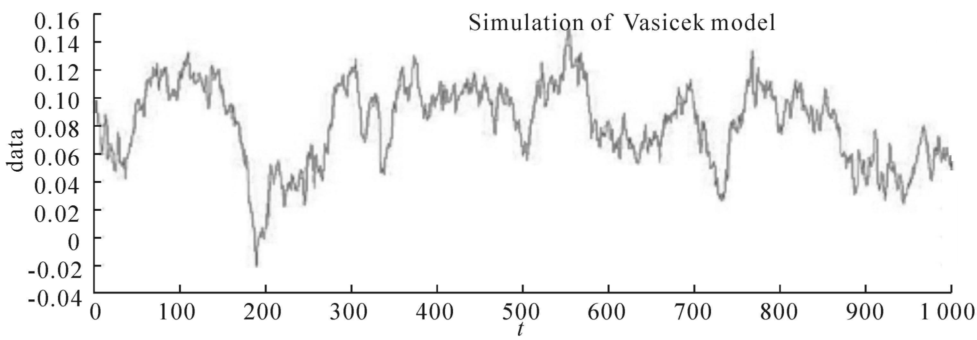


图3　用 Vasicek 模型模拟出的1 000个数据

表1列出对 Vasicek 模型的估计结果.

表1　Vasicek 模型估计结果

待估参数真值	Euler 结果	SD_{Euler}	T_{Euler}	Hermite 结果	$SD_{Hermite}$	$T_{Hermite}$
$k=0.3$	0.327 59	0.088 663	3.694 8	0.332 15	0.091 226	3.640 9
$a=0.08$	0.088 342	0.009 873 0	8.947 8	0.088 342	0.009 873 1	8.947 8
$\sigma=0.03$	0.029 484	0.000 659 46	44.709	0.029 893	0.000 678 03	44.088

用 CIR 方程模拟出的1 000个数据所生成的时间序列见图4.

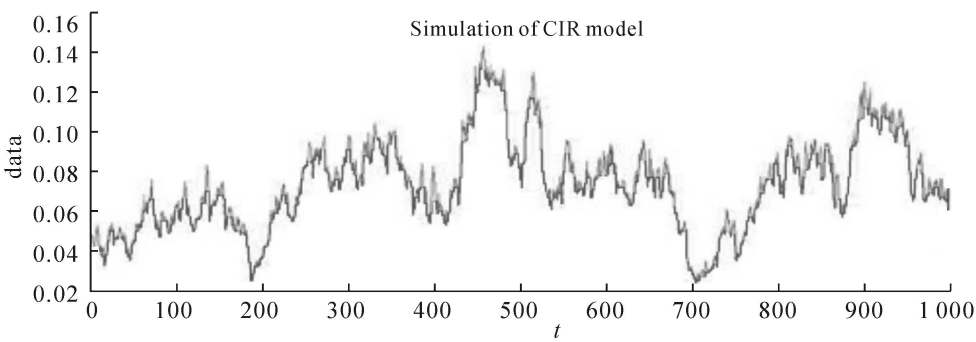


图4　用 CIR 模型模拟出的1 000个数据

对CIR 估计结果列于表 2.

表 2 CIR 模型估计结果

待估参数真值	Euler 结果	SD_{Euler}	T_{Euler}	Hermite 结果	$SD_{Hermite}$	$T_{Hermite}$
$k=0.3$	0.230 97	0.074 317	3.107 8	0.239 72	0.076 509	3.133 2
$a=0.07$	0.071 600	0.008 576 6	8.348 3	0.071 59 3	0.008 362 0	8.561 6
$\sigma=0.07$	0.067 480	0.001 509 0	44.718	0.068 262	0.001 5424	44.258

从以上的估计结果可以看出: 用Hermite 扩展代替扩散过程的转移密度函数只能稍微提高对模型参数的识别, 有的时候估计结果比用Euler 方法稍差一点. 这个结论与文献[7]结论相一致, 主要原因是在选取模型的参数时使用的是接近现实的参数值, 这使得方程的漂移项太小, Δ 的取值是 1/12, 同时数据不存在很大的波动性使得模型的转移密度接近正态, 这些都导致了 Euler 方法有时候比Hermite 方法更好, 尤其在识别方程的均值回复速度 k 上有时优于 Hermite 方法.

4 结语

通过比较发现用 Hermite 扩展确实能更好地代替方程的转移密度函数, 在存在闭端解的 2 个方程中其近似的转移密度函数明显比 Euler 下的好. 运用到参数估计方面由于现实数据的特点(较小的漂移项和较小的波动项) 使得其不能很好地发挥作用, 所得出的参数值与 Euler 下的相差不大. 在本研究中, 笔者都是对单要素模型转移密度的近似替代, 如何将其运用到多要素模型是以后的研究重点.

参考文献:

[1] VASICEK O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure [J]. Journal of Financial Economics, 1977(5): 177- 188.

[2] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385- 407.

[3] LO. Maximum Likelihood Estimation of Generalized Ito Process with Discretely Sampled Data [J]. Econometric Theory, 1988(4): 231 - 247.

[4] DURHAM G B, GALLANT A R. Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Diffusion Process [J]. Journal of Fincial Economics, 2007, 54(3): 345- 363.

[5] BRANDT M W, SANTA-CLARA P. Comment on Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation [J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2002, 20: 321- 324.

[6] Aït-SAHALIA. Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions [J]. Journal of Finance, 1999, 54: 1 361- 1 395.

[7] Aït-SAHALIA. Maximum-Likelihood Estimation of Discretely-Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach [J]. Econometrica, 2002, 70: 223- 262.

Estimaiton Methods of the Transition Density of the Duffusion Model Based on the Matlab Simulation

HE Yuan[1], CHEN Hui[2]

(1. School of Information Science and Technology, Hunan Agricultural University, Changsha 410128, China;

2. College of Business Management, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Nowadays, diffusion models are applied to the electronic and financial fields to describe the dynamics of the variables. Transition density, the most important variables to the diffusion models, is always a hot studying field. With the development of the matlab, it is very significant to find the optimal methods for the estimation of the transition density by making use of the simulation and numerical functions of it. The author compares two methods of estimating transition densities of diffusion model i. e., Euler and Hermite. After the comparison of the approximation to the closed-form densities for the Vasicek and CIR models, it is found that the Hermite method can estimate the transition densities much more accurately in comparison with the Euler method. Then, the further estimation of the diffusion model parameters is conducted by these two methods, which proves that Hermite method can better recognize the model parameters than Euler method, and it can reduce the estimation errors. .

Key words: diffusion model; transition density; matlab simulation

(责任编辑 易必武)