文章编号: 1007- 2985(2008)02- 0027- 03

CAPM 与 APT 在 Hilbert 空间中的统一*

龙会典[1], 张海燕[2]
(1. 广东外语外贸大学信息学院, 广东 广州 510440; 2. 广东技术师范学院天河学院, 广东 广州 510665)

摘 要: 引入随机向量的 Hilbert 空间, 证明了 CAPM 与 APT 统一于线性定价法则.

关键词: Hilbert 空间; CAPM; APT; 随机贴现因子理论
中图分类号: F830.91 文献标识码: A

1952 年, Markowitz 在《资产组合选择》中提出了均值- 方差模型, 标志着现代组合投资理论的开端. 之后, 他的学生 Sharp 在均值- 方差模型的基础上建立了资本资产定价模型(Capital Asset Pricing Model, CAPM), Ross 提出了套利定价理论(Arbitrage Pricing Theory, APT)[1]. 这 2 个理论在解释的角度、基本假设、方法以及适用范围等方面均有重大的区别. 但殊途同归, 在未定权益的 Hilbert 空间中, 它们在本质上无非都是线性定价法则的表现形式. 在数学上, 它们都是说, 一个证券收益率随机向量可以分解为由无风险利率和随机贴现因子所构成的一个平面上的向量和一个与该向量相垂直的向量的和.

1 未定权益的 Hilbert 空间

现在讨论一个未来带不确定性的证券市场模型, 证券市场上所有的证券及任意种证券组合未来的价值看作随机变量.

定义 1 一个证券市场中的未定权益空间, 是指随机变量所形成的向量空间.

定义 2 线性空间 H 上的一个二元函数 $a(\cdot,\cdot): H\times H \to K$, 称为共轭双线性函数, 如果:

(1) $a(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 a(x, y_1) + \bar{\alpha}_2 a(x, y_2)$;

(2) $a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 a(x_1, y) + \alpha_2 a(x_2, y)$.

其中: $\forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$.

定义 3 线性空间 H 上的一个共轭双线性函数 $(\cdot,\cdot): H\times H \to K$, 称为一个内积, 如果它满足:

(1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ $(\forall x, y \in H)$;

(2) $(x, x) \geqslant 0$ $(\forall x \in H)$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

定义 4 具有内积的线性空间称为内积空间.

定义 5 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

有了未定权益空间后, 就可以对未定权益讨论定价法则, 现在假设未定权益随机变量的方差有限. 一个随机变量方差刻画的是该随机变量可能的变化幅度, 因此假定它的方差有限是合理的, 否则将意味着未来不确定价值的随机变化毫无节制. 在这一假定下, 可以在未定权益向量空间引入数学结构.

* 收稿日期: 2007- 04- 16
作者简介: 龙会典(1973-), 男, 湖南武冈人, 广东外语外贸大学信息学院讲师, 主要从事数理经济研究.

命题1　若用 H 表示证券市场上方差有限的随机变量所构成的线性空间, 并在其上定义内积$(x, y) = E[xy]$, 则 H 是一个内积空间.

证明　由$\frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{cov}(x, x)\,\mathrm{cov}(y, y)}} \leqslant 1$, 即$\mathrm{cov}^2[x, y] \leqslant \mathrm{var}[x]\,\mathrm{var}[y]$, 说明当方差有限时它们的二阶矩也有限. 下证$(x, y) = E[xy]$ 是内积空间.

(i) $(x, y) = E[xy] = E[yx] = (y, x)$.

(ii) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = E[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) y] = \alpha_1 E[x_1 y] + \alpha_2 E[x_2 y] = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$.

(iii) $(x, x) = E[x^2] = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

故$(x, y) = E[xy]$ 是 H 上的一个内积.

进一步假定这个内积空间是完备的, 即它是一个Hilbert 空间. 在Hilbert 空间中, 有一个著名的Riesz 定理[3].

引理1(F. Riesz 定理)　设 f 是Hilbert 空间 H 上的一个连续线性泛函, 则必存在唯一的 $y_f \in H$, 使得 $f(x) = (x, y_f)\ (\forall x \in H)$.

现在假定定价函数 $p: H \rightarrow \mathbf{R}$ 为非零线性连续函数. 于是, 得到下面的随机折现因子存在定理:

引理2(随机折现因子存在定理)[2-3]　在未定权益的Hilbert 空间中, 当定价函数连续时, 存在唯一的非零 $m \in H$, 有 $p(x) = E[mx] = E[m]E[x] + \mathrm{cov}[x, m]$.

这里 m 是未定权益 H 中的元素, 称之为随机折现因子, 称 p 为随机向量Hilbert 空间上的定价函数.

命题2　在未定权益的Hilbert 空间中, 存在唯一的向量 $\mathbf{1}_H$ 使得对任意的 $x \in H$, 有 $E[x] = E[\mathbf{1}_H x]$ 成立.

2　Hilbert 空间下的CAPM 与APT

定义6[4]　设 p 是定义在 H 上的非零线性连续泛函, 对 $\forall x \in H$ 比值 $x/p(x)$, 称为证券 x 的收益率.

定理1　设 H 是未定权益的Hilbert 空间, H 中存在无风险证券1, m 是随机折现因子, 记 $r_f = 1/p(1) = 1/E[m]$, $r_m = m/p(m) = m/E[m^2]$, 收益率超平面 $\mu = \{r \in H \mid p(r) = E[mr] = 1\}$, 那么对任意 $r \in \mu$, 有

$$E[r] - r_f = \frac{\mathrm{cov}[r_m, r]}{\mathrm{var}[r_m]}(E[r_m] - r_f).$$

证明　因为 $p(r) = E[mr] = 1$, 所以 $1 = E(m)E(r) + \mathrm{cov}(m, r) = \frac{E(r)}{r_f} + \mathrm{cov}(m, r)$, 即

$$E(r) - r_f = -r_f \mathrm{cov}(m, r). \tag{1}$$

另一方面, 以折现因子 m 的收益率 r_m 代替(1) 式的 r, 有

$$E(r_m) - r_f = -r_f \mathrm{cov}(m, r_m). \tag{2}$$

当 m 为风险证券, 即 $\mathrm{var}[m] \neq 0$ 时, 有

$$E(r_m) - r_f = \frac{E[m]}{E[m^2]} - \frac{1}{E[m]} = -\frac{E[m^2] - E^2[m]}{E[m^2]E[m]} = -\frac{\mathrm{var}[m]}{E[m^2]E[m]} \neq 0.$$

(1), (2) 两式相除, 得

$$E[r] - r_f = \frac{\mathrm{cov}[m, r]}{\mathrm{cov}[m, r_m]}(E[r_m] - r_f) = \frac{\mathrm{cov}[m, r]/E[m^2]}{\mathrm{cov}[m, r_m]/E[m^2]}(E[r_m] - r_f) = \frac{\mathrm{cov}[r_m, r]}{\mathrm{var}[r_m]}(E[r_m] - r_f).$$

这个等式就是著名的资本资产定价模型(CAPM) 的一种形式.

定理2　设 H 是未定权益的Hilbert 空间, $p: H \rightarrow \mathbf{R}$ 为其连续线性定价函数, m 是随机折现因子, $f_1, f_2, \dots, f_k$ 是风险因子, 记 $r_f = 1/p(1) = 1/E[m]$, $r_m = m/p(m) = m/E[m^2]$, 收益率超平面 $\mu = \{r \in H \mid p(r) = E[mr] = 1\}$, 则对任意 $r_j \in \mu$, 有

$$E[r_j] - r_f = \sum_{i=1}^{K} \lambda_{ji} E([f_i] - r_f) \qquad j = 1, 2, \dots$$

证明　定义随机折现因子

$$m = \frac{1}{r_f} + \sum_{i=1}^{K} \frac{(r_f - E[f_i])(f_i - E[f_i])}{r_f \operatorname{var}[f_i]}.$$

由定价函数 $p(x) = E[mx] = E[m]E[x] + \operatorname{cov}[x, m]$, 有

$$p(x) = \frac{E[x]}{r_f} + \sum_{i=1}^{K} (r_f - E[f_i])\beta_{xf_i}, \tag{3}$$

其中 $\beta_{xf_i} = \dfrac{\operatorname{cov}[x, f_i]}{\operatorname{var}[f_i]}$, $i = 1, 2, \cdots, K$. 因此, 在(3) 式中令 $x = r_i$, 有

$$1 = p(r_i) = \frac{E[r_i]}{r_f} + \sum_{i=1}^{K} (r_f - E[f_i])\beta_{r_i f_i},$$

即 $E[r_j] - r_f = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i E([f_i] - r_f)$, 其中 $\lambda_i = \beta_{r_i r_f}$. 这个等式就是渐近套利理论的表现形式.

参考文献:

[1] ROSS S A. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing [J]. Journal of Economic Theory, 1976, 13: 341- 360.

[2] CAMPBELL J Y. Asset Pricing at the Millennium [J]. Journal of Finance, 2000, 55: 1 515- 1 566.

[3] 约翰·Y, 坎贝尔, 安德鲁·W, 等. 金融市场计量经济学 [M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2003.

[4] 史树中. 金融经济学十讲 [M]. 上海: 上海人民出版社, 2003.

Consistence of CAPM and APT Under the Stochastic Vector Hilbert Space

LONG Hui-dian[1], ZHANG Hai-yan[2]

(1. School of Information, Guangdong Foreign Studies University, Guangzhou 510440, China; 2. Tianhe College, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510665, China)

Abstract: This paper makes track for this way of thinking, deriving stochastic vector Hilbert space and proves the consistence of CAPM and APT in the linear pricing rule.

Key words: Hilbert space; CAPM; APT; stochastic discount factor theorem

(责任编辑　向阳洁)