

# 教学用的数学知识要素及其关系

董涛

(福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

**摘要:** 教学用的数学知识是教师在数学教学中用到的数学知识。它含有七种要素: 数学知识(概念与过程)、数学方法、数学信念、内容组织的知识、学生理解的知识、效果反馈的知识、教学策略的知识。这七种要素紧密联系、互相支撑, 构成三层嵌套结构。

**关键词:** 数学知识; 教学; 结构

**中图分类号:** G427

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1008-0627(2011)04-0007-03

PCK (Pedagogical Content Knowledge) 是舒尔曼对教师特有专业知识的概念化。舒尔曼把 PCK 定义为使人易于懂得该学科内容的表达和阐述方式, 及学生在学习具体课题时已有的一些日常概念和先入之见。<sup>[1]</sup> 一些后续研究认为, 除 PCK 外, 数学教师的内容知识也是理解数学教学实践的重要成分。<sup>[2]</sup> Ball 把教师在数学教学中用到的数学知识和 PCK 称为教学用的数学知识 (mathematics in and for teaching), 它是数学知识的教学理解, 是对教学的核心活动作数学上的分析: 评估学生已经知道什么, 确认学生需要学习什么, 选择所教概念的适宜表征, 评估、选择和修改教学材料, 决定课堂活动的序列及替代活动, 控制学生的讨论, 找到活动所需资源。<sup>[3]</sup> 这类知识与数学知识不同, 它的内容组织、逻辑体系与认识论更多考虑了学生的观点, 增加了许多可教性的考虑。这类知识也不等同于数学 PCK, 它比 PCK 增加了数学结构、认识论与方法论方面的考虑。本文通过案例探讨了教学用的数学知识的要素及其关系。

## 一、教学用的数学知识要素

### (一) 数学知识

案例一: 一教师在教授《因式分解》这节课时, 通过六组练习, 引导学生自行探究、概括, 形成了因式分解的概念。学生认识到“因式分解是分解因数(在多项式中)的推广, 因式分解与

整式乘法互逆, 可以用整式乘法来检验, 用分解因数, 整式乘法来类比, 帮助理解因式分解的概念”。采用此种教学方法, 教师不仅要掌握所教的数学知识, 还要掌握所教数学教科书的概念结构, 即完整理解所教数学教科书的理论体系和发展路线, 清晰掌握理论体系的“节点”——核心概念, 掌握核心概念之间的联系网络。掌握了概念结构才使她突出重要的数学内容, 围绕一个大观念组织数学内容, 使数学知识易组织、易懂、易记、易迁移, 缩小初级知识(事实术语的知识)与高级知识(结构化的概念知识)的差距。

这位教师没有直接告诉学生因式分解的定义, 而是引导学生类比旧知识, 经过不断的猜测、批判、反驳建立了因式分解的概念。能设计出有效的数学探究空间, 得益于这位教师拥有数学过程性知识。教师只有拥有过程性知识, 才知道在教学过程中哪里需要指导, 如何指导, 如何示范, 才有能力设计数学探究过程。

### (二) 教学方法

案例二: 一教师在讲授字母表示数时, 用实例来解释字母的含义。比如扑克牌中的 J 表示 11, 揭示字母可以表示一个特定的数;  $A_{20}$  表示上海外环线, 揭示字母可以表示特定的事物或是事物的速记; 一元一次方程  $2x=4$  中的字母  $x$ , 揭示字母可以表示特定的未知数;  $a+b=b+a$  揭示字母可以表示一类已知数;  $n$  只青蛙  $4n$  条腿揭

收稿日期: 2011-02-14

基金项目: 福建省教育厅 B 类课题 (JB09058)

作者简介: 董涛 (1972-), 男, 山东淄博人, 讲师/博士, 主要研究方向: 数学教师教育。E-mail: dtdyt@163.com

示字母可以表示变量(头数与腿数之间的数量依赖关系)。这位教师使用特殊化的数学方法,使学生理解字母表示数含义的模式。教师掌握数学方法,才能从探究过程中相对分离出数学方法,与学生明确讨论、比较,帮助生理清方法的使用条件、策略和作用,提升学习使用数学方法的动机,形成学生多方面体验。

### (三) 数学信念

案例三:一教师在讲授勾股定理时,利用网络,让学生通过特例提出猜想并证明勾股定理。学生提出的猜想并不限于勾股定理,还有像 $2ab+1=c^2$ ,  $a+b+a^2=b^2$ 这样一些有条件的结论。学生通过举反例否定了这些有条件的结论,认识到数学定理必须得到证明,举例证实是不够的。另一位教师通过演示一个幻灯片证实了勾股定理,接下来整节课应用定理做一些计算题。课后访谈显示,数学信念决定数学的探究方式,如数学是什么,从哪里来,有什么用,如何判断数学的真,应该如何学习数学等。前一位教师把数学看成是一门经验学科,学习数学要以观察、实验等各种系统化尝试来确定内在规律。后一位教师把数学看成一些事实、术语、命题、规则、算法,学数学就是记住上述内容。数学信念影响教师确定教学目标、选择教学内容和组织教学过程以及评价学习结果,影响学生的数学体验,最终影响学生对数学的根本态度、情感和价值观。

### (四) 内容组织的知识

案例四:一教师用一节课教完相似三角形的4个判定定理,重点放在选用哪个判定定理来判定三角形相似。另一位教师按照教科书的安排,用四课时教完,第三节课只教授和训练边边边定理。课后访谈表明,差异源自两位教师对学生需要学习知识的判断不同,前者认为学生会了的就不用教,后者认为教科书上的内容都要教。教科书没法兼顾每位教师及学生的个人知识,教师在教学时要针对学生知识掌握情况,对教科书的内容重新组织,确定教学目标、重点及适合自己学生的序列。内容组织的知识是教师个人的课程知识,影响教师对学生学习和最有价值知识的判断。

### (五) 学生理解的知识

案例五:一教师通过让学生分别求出半径为

$r$ , 圆心角分别为 $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $1^\circ$ 的扇形面积猜出了扇形面积公式。这得益于她知道学生的先前知识和相应的学习方法。学生知道什么、怎么知道的及需要学什么是教师必备知识。不同学生有不同的先前知识。教学时需要事先确定学生的先前知识。如果学生已经具备充分的先前知识,就在学生已有知识基础上扩展新知识,获得新知识后要及时与各种相关知识建立联系,融会贯通。学生的先前知识不足以支撑新知识的学习,学习材料又没有结构时,要预先嵌入组织者。学生觉得容易的课题,可以少讲甚至不讲,由学生自我构建知识。学生理解有误时,要针对性地纠正。如果学生方法能够推广到数学通用方法,就在学生的方法上扩展,适时推广到通法。如果学生方法太特殊,使用范围太窄无法自然推广到数学通用方法,教师需要设置情景引发学生认知冲突,使学生认识到自己方法的局限性,通过认知重组学到数学通用方法。学生在特定年龄对某一概念或方法只能理解到某一程度,教师要特别注重学生理解能力的发展程度,选择适合学生理解能力的学习任务。

### (六) 效果反馈的知识

案例六:一教师用比较0.42, 0.5的大小来评价学生对小数大小的理解。为何采用此种方法?该老师认为一些学生没有理解小数的位值,会把整数中“数位”多的数大的规则过度推广到小数来。选用这个题目,能够鉴别出持有这类误解的学生,及时消除学生的误解。效果反馈支撑教师做出下一步的教学决策,是数学教学不可缺少的一部分。它具有导向功能,通过使用的题目向学生表明哪些知识和表现是重要的,使学生明确学习方向与内容。它具有诊断功能,能够诊断学生的错误。它培养学生自我评价和反思解题过程的能力,提高元认知技能。

### (七) 教学策略的知识

案例七:一教师在讲授《画角的和差》时,通过复习线段和差,即两条线段的和就是一条线段接上一条线段,两条线段的差就是一条线段截去一条线段。这给学生确立了一个直观、有结构的样例。学生类比这一样例,探索得出角的和差画法。学生发现了角的和差与线段的和差在图形结构上是相同的,操作过程是相同的。学生在已

有知识经验中通过推理生成新知识,在新旧知识之间建立合理的、实质联系,形成简洁统一的认知结构,并认识到类比是学习数学的重要方法。这节课的成功得益于教师的类比教学策略。教学策略包含教学活动的设计与顺序安排、教学内容的呈现方式、师生课堂交流的内容设计等,是具有工艺性的教学实施方案。教师通过教学策略的实施,引出重要的数学概念,与学生的已有知识经验建立联系,阐明所教内容的重要特征,诱导学生思考。

## 二、教学用的数学知识的关系

教学用的数学知识的各构成要素间紧密联系、相互支撑,构成一个三层嵌套结构。处于外层的是数学知识、数学方法和数学信念,中间层是内容组织的知识、学生理解的知识 and 效果反馈的知识,内层是教学策略的知识(图1)。外层属于数学与PCK的交集,侧重数学知识,理论性、规律性强,较抽象。中间层与内层属于PCK,实践性强一些。这三层之间互相联系。外层的数学知识、方法、信念是根本,是学生数学学习的目标,它决定了为什么教,教什么。中间层与内

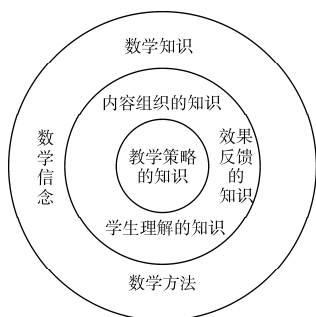


图1 教学用的数学知识要素的关系

层是由外层衍生出来的可教性、可视性的数学教学知识,是外层的学术形态向教育形态的转化形式,是学生可接受的数学形式。单有中间层与内层知识是不够的,这些知识不足以使教师俯瞰数学的整体面貌,选择重要的数学概念与过程。外层知识中,数学信念是统领,数学方法把数学信念中的探究方式具体化、操作化,数学知识是基础部件,是方法与信念的载体;中间层知识中,内容组织是新旧知识间的联系,学生的先前知识与学生理解的发展有关,效果反馈评价是评价学生的理解。中间层知识与内层知识紧密联系。教学策略是在统筹考虑内容组织、学生理解和评价强化等因素的基础上形成的教学实施方案,中间层知识是它的部件。单独考虑学生的理解,忽视学生理解的局限性,提供的背景不充分,难以实现对给定结构的完全理解。单独考虑内容如何组织,忽视学生理解的知识,学生只学到一些与自己日常经验无关的惰性知识。

有了这三层知识,教师才能帮助学生构建结构化、条件化、策略化的数学知识系统。

## 参考文献

- [1] SHULMAN L. Those who understand knowledge growth in teaching[J]. Educational Researcher, 15(2): 4-14.
- [2] PONTE J P, CHAPMAN O. Mathematics teachers' knowledge and practices [C]. GUTIERREZ A, BOERO P. Handbook of research on the psychology of mathematics education, AW Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2006: 485.
- [3] BALL D L, LUBIENSKI S T, MEWBORN D S. Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge[C]. RICHARDSON V. Handbook of research on teaching(4th). Washington: American Educational Research Association, 2001: 433-456.

## Upon the Structure of Mathematical Knowledge for Teaching

DONG Tao

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

**Abstract:** Mathematical knowledge applied in teaching contains seven elements: mathematical knowledge (concepts and processes), methods, beliefs, content organization, students' understanding, effects feedback, and instructional strategies. These interconnected elements form three inbuilt structures.

**Key words:** mathematics knowledge; teaching; structure

(责任编辑 夏登武)