文章编号: 1007- 2985(2009) 01- 0001- 04

# $n$ 维单形中 Veljian-Korchmaros 不等式的稳定性及应用*

张　垚
(湖南师范大学数学与计算机科学学院, 湖南 长沙　410081)

摘　要: 给出了 $n$ 维单形中 Veljian-Korchmaros 不等式的稳定性型式. 作为应用还给出了涉及单形的体积、外接超球半径和中线的不等式的稳定性型式.

关键词: 稳定性; $n$ 维单形中不等式; 体积; 外接超球半径; 中线
中图分类号: O184　　　　文献标识码: A

## 1　相关基础知识和主要结论

几何不等式的稳定性是对应的几何不等式的加强形式, 它最初出现文献[1- 2]中, 但直到最近才得到系统的研究[3- 9], 特别是 Groemer 和 Gardner 的工作尤为出色. 它作为几何断层学(geometric tomography)的研究对象之一, 被广泛应用于体视学(stereology)、机器人学中的几何探索(geometric probing)和仿晶学(crystallography) 等领域.

文献[8] 对几何不等式稳定性的概念给出了明确的描述. 下面以 1 个具体的几何不等式为例来说明这一概念. 设 $P(K)$ 和 $A(K)$ 是任意的凸体(亦称凸域) $K$ 的周长和面积, 则有下列著名的等周不等式成立:

$$P(K)^2 \quad 4 \ A(K), \tag{1}$$

等号成立当且仅当 $K$ 为圆盘. 现假设对任意 $\ > 0$, 如果

$$P(K)^2 - 4 \ A(K) \quad , \tag{2}$$

人们能否断言, 存在圆盘 $B$, 使在某种 偏差 度量 $g(B, K)$ 下, 有

$$g(B, K) \quad f(\ ), \tag{3}$$

这里 $f(\ )$ 是满足当 $\quad 0$ 时 $f(\ ) \quad 0$ 的非负实函数. 若存在这样的 偏差 度量使当不等式(2) 成立时, 必有不等式(3) 成立, 则称不等式(1) 是稳定的, 否则称不等式(1) 是不稳定的. 事实上, 对不等式(1) 有下列熟知的稳定性定理[5].

设 $(B, K)$ 为 $K$ 和 $B$ 之间的 Hausdroff 度量, 则存在圆盘 $B$, 使对任意 $\ > 0$, 有

$$P(K)^2 - 4 \ A(K) \qquad (B, K) \quad \frac{1}{4\sqrt{\ }} {}^{1/2}. \tag{4}$$

若在不等式(4) 中令 $P(K)^2 - 4 \ A(K) = \ $, 则得到不等式(1) 的一个加强形式

$$P(K)^2 - 4 \ A(K) \quad 16 \ (B, K)^2. \tag{5}$$

显然不等式(5) 蕴含不等式(1), 通常称不等式(5) 是不等式(1) 的一个稳定性型式或稳定性版本(stability versions).

全文约定 $n(> 1)$ 维欧式空间 $E^n$ 中 $n$ 维单形 $\ = \{A_1, A_2, \ , A_{n+1}\}$ 的棱长为 $a_i(i = 1, 2, \ , \frac{1}{2}n(n+1))$, 外接超球半径为 $R$, 内切超球半径为 $r$, 体积为 $V$, 顶点 $A_i$ 所对的 $(n-1)-$ 维侧面单形 $F_i = \{A_1, \ , A_{i-1}, A_{i+1}, \ , A_{n+1}\}$ 的 $(n-1)-$ 维体积为 $S_i(i = 1, 2, \ , n+1)$, 从顶点 $A_i$ 出发引出的中线长为 $m_i(i = 1, 2, \ , n+1)$, 并记 $P = \sum_{i=1}^{n(n+1)/2} a_i$, $S = \sum_{i=1}^{n+1} S_i$. 对另一个 $n$ 维单形 $\ $, 使用类似的记号, 例如 $\ $ 的棱长记为 $a_i(i = 1, 2, \ , \frac{1}{2}n(n+1))$.

* 收稿日期: 2008- 06- 10
基金项目: 湖南省教育厅科学研究项目(00C064); 湖南省自然科学基金资助项目(06JJ1034)
作者简介: 张　垚(1938- ), 男, 湖南长沙人, 湖南师范大学数学与计算机科学学院教授, 主要从事凸体几何与几何不等式、矩阵论、数值代数和数学教育的研究.

文献[10] 证明了 Veljian D 于 1970 年提出的如下猜想: 对 $n$ 维单形 ，有

$$P^{2/(n+1)} \quad \frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}} V, \tag{6}$$

等号成立当且仅当 　为正则单形.

文献[11] 给出了(6) 式的一个不同证明, 并且文献[12] 给出了(6) 式的一个加强.

此外, 在 $n$ 维单形 　中, 还有下列结论:

$$R^n \quad n!\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{1/2} V, \tag{7}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} m_i\right)^{\frac{n}{n+1}} \quad \frac{n!(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}} V, \tag{8}$$

并且(7), (8) 式中等号成立当且仅当 　为正则单形.

(7) 式的证明见文献[13], (8) 式的证明见文献[14].

文献[9] 曾给出 2 个 $n$ 维单形之间的一种新的度量, 在此基础上笔者将给出(6) 式的稳定性型式, 作为应用, 还给出(7), (8) 式的稳定性型式.

定义 1[9] 　记 $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. 设 $E^n$ 中所有 $n$ 维单形组成的集合为 $\mathscr{S}$, $I = \{1, 2, \quad , m\}$ 是指标集, $_m$ 是 $I$ 上的 $m$ 阶置换群. 对任意 　, 　　$\mathscr{S}$, 定义 　和 　之间的度量为

$$d(\quad,\quad) = \min\left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{(i)})} \mid \quad {}_m \right\}. \tag{9}$$

命题 1[9] 　$n$ 维单形集合 $\mathscr{S}$ 按(9) 式定义的度量构成一个度量空间($\mathscr{S}$, $d$).

笔者的主要结论是下列定理:

定理 1 　对任意 $n$ 维单形 ，有

$$P^{2/(n+1)} \quad \frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}} V\left(\frac{R}{nr}\right)^{1/(n+1)} \quad \frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}} V, \tag{10}$$

等号成立当且仅当 　为正则单形.

定理 2 　对任意 $n$ 维单形 ，存在一个 $n$ 维正则单形 ，使得

$$P^{2/(n+1)}/V - \frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}} \quad \frac{2^{n/2}(n-2)!}{\sqrt{(n+1)^7}}\left(\frac{d(\quad,\quad)}{R}\right)^2, \tag{11}$$

等号成立当且仅当 　为正则单形.

显然, 不等式(10) 是(6) 式的加强, 而不等式(11) 是(6) 式的稳定性型式, 并且它也是(6) 式的加强形式.

定理 3 　在 $n$ 维单形 　中, 有

$$R^n \quad n!\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{1/2} V\left(\frac{R}{nr}\right), \tag{12}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} m_i\right)^{n/(n+1)} \quad \frac{n!(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}} V\left(\frac{R}{nr}\right)^{1/(n+1)^2}, \tag{13}$$

并且(12), (13) 式中等号成立当且仅当 　为正则单形.

定理 4 　在 $n$ 维单形 　中, 存在 $n$ 维正则单形 ，使得

$$R^n/V - n!\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{1/2} \quad \frac{n!}{n-1}\left(\frac{n^{n-2}}{(n+1)^{n+5}}\right)^{1/2}\left(\frac{d(\quad,\quad)}{R}\right)^2, \tag{14}$$

$$\left(\prod_{i=0}^{n} m_i\right)^{n/(n+1)}/V - \frac{n!(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}} \quad \frac{n!}{n-1}\left(\frac{(n+1)^{n-9}}{n^{n+2}}\right)^{1/2}\left(\frac{d(\quad,\quad)}{R}\right)^2, \tag{15}$$

并且(14), (15) 式中等号成立当且仅当 　为正则单形.

显然(12), (13) 式分别是(7), (8) 式的加强, 而(14), (15) 式分别是(7), (8) 式的稳定性型式, 并且它们也分别是(7), (8) 式的加强形式.

## 2　相关引理

引理 1[11] 　对任意 $n$ 维单形 ，有

$$P^{2/n} \quad \frac{2^{(n+1)/2} n!}{\sqrt{n}} VR,$$

等号成立当且仅当存在 $n+1$ 个正数 $c_0, c_1, \quad , c_n$, 使得 $a_{ij} = c_i c_j$ ($i, j = 0, 1, \quad , n$). 特别地, 当 　为正则单形时等号成立.

引理 2[15] 　对任意 $n$ 维单形 ，有

$$R^{n-1} \quad n!\left(\frac{n^{n-4}}{(n+1)^{n+1}}\right)^{1/2} S,$$

等号成立当且仅当　为正则单形.

引理 3[9]　对任意 $n$ 维单形　, 存在一个 $n$ 维正则单形　, 使得对任意　$>0$, 有

$$\left(\frac{R}{nr}\right) - 1 \quad \frac{}{(n+1)^2 n(n-1)}\left[\frac{d(\ ,\ )}{R}\right]^2,$$

等号成立当且仅当　为正则单形.

由文献[14] 中的引理 2 和引理 3 立即可得如下结论:

引理 4　设 $G$ 是 $n$ 维单形　$=\{A_1, A_2, \ \ , A_{n+1}\}$ 的重心, 向量 $\overrightarrow{GA}_i$ 上的单位向量为 $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \ \ , n+1)$, 并且定义 $G$ 对 $n-1$ 维侧面 $F_i$ 所张的空间角为

$$_i = \arcsin|\det(\boldsymbol{e}_1, \ \ , \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ \ , \boldsymbol{e}_{n+1})|,$$

那么有下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sin^2 {}_i \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \tag{16}$$

等号成立当且仅当　为正则单形.

引理 5　对任意 $n$ 维单形　, 有

$$\sum_{i=1}^{n+1} m_i \quad \frac{n!(n+1)^{(n-2)/2}}{n^{n/2}} V\left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2\right)^{1/2}, \tag{17}$$

等号成立当且仅当　为正则单形.

证明　记 $n$ 维单形　$_i = \{A_i, \ \ , A_{i-1}, G, A_{i+1}, \ \ , A_{n+1}\}$ 的体积为 $V_i$, 由重心的性质可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}V = V_i = \frac{1}{n!}|\det(\overrightarrow{GA}_1, \ \ , \overrightarrow{GA}_{i-1}, \overrightarrow{GA}_{i+1}, \ \ , \overrightarrow{GA}_{n+1})| &= \\ \frac{1}{n!}\prod_{j=1, j\ \ 1}^{n+1}|\overrightarrow{GA}_j|\ |\det(\boldsymbol{e}_1, \ \ , \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ \ , \boldsymbol{e}_{n+1})| &= \\ \frac{1}{n!}\left(\prod_{j=1, j\ \ i}^{n+1}\frac{n}{n+1}m_j\right)\sin {}_i,\end{aligned}$$

即

$$\sin {}_i = \frac{n!(n+1)^{n-1} m_i V}{n^n \prod_{j=1}^{n+1} m_j}. \tag{18}$$

(18) 式代入(16) 式整理后即得(17) 式, 并且由引理 4 知(17) 式中等号成立当且仅当　为正则单形.

## 3　定理的证明

定理 1 的证明　由引理 1 和引理 2, 有

$$P^{2/n} \quad \frac{2^{(n+1)/2} n!}{\sqrt{n}} V R^{1/n} (R^{n-1})^{1/n} \quad \frac{2^{(n+1)/2} n!}{\sqrt{n}} V R^{1/n}\left[n!\left(\frac{n^{n-4}}{(n+1)^{n+1}}\right)^{1/2} S\right]^{1/n}.$$

用恒等式 $S = \frac{nV}{r} = \ n^2\left(\frac{V}{nr}\right)$ 代入并整理, 然后两边 $n/(n+1)$ 次方, 便得不等式(10) 的左边部分不等式; 再由 $n$ 维单形中的 Euler 不等式[16] $R^2 \quad nr$ (等号成立当且仅当　为正则单形), 便知(10) 式的右边部分不等式也成立, 并且由引理 1 和引理 2 知(10) 式中等号成立当且仅当　为正则单形. 证毕.

定理 2 的证明　由定理 1 及引理 3, 得

$$P^{2/(n+1)}/V - \frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}} \quad \frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}}\left[\left(\frac{R}{nr}\right)^{1/(n+1)} - 1\right] \quad \frac{2^{n/2}(n-2)!}{\sqrt{(n+1)^7}}\left[\frac{d(\ ,\ )}{R}\right]^2,$$

即(11) 式成立, 并且(11) 式中等号成立当且仅当　为正则单形. 证毕.

定理 3 的证明　记 $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. 由引理 2 和恒等式 $S = \ nV/r$, 可得

$$R^n = RR^{n-1} \quad R \quad n!\left[\frac{n^{n-4}}{(n+1)^{n+1}}\right]^{1/2} S = n!\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right]^{1/2} V\left(\frac{R}{nr}\right),$$

即(12) 式成立, 并且(12) 式中等号成立当且仅当　为正则单形. 其次, 由引理 5 和中线长公式[17] $\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2 = \frac{n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{m} a_i^2$, 有

$$\sum_{i=1}^{n+1} m_i \quad \frac{n!(n+1)^{(n-2)/2}}{n^{n/2}} V\left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2\right)^{1/2} = \frac{n!(n+1)^{(n-2)/2}}{n^{n/2}} V\left(\frac{n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{1/2}.$$

再应用算术-几何平均值不等式及定理 1, 可得

$$\prod_{i=1}^{n+1} m_i \quad \frac{n!(n+1)^{(n-2)/2}}{n^{n/2}} V\left(\frac{n+1}{n^2} \quad m\right)^{1/2}\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)^{1/m} = \frac{n!(n+1)^{n/2}}{2^{1/2} n^{(n+1)/2}} V\left(P^{2/(n+1)}\right)^{1/n}$$
$$\frac{n!(n+1)^{n/2}}{2^{1/2} n^{(n+1)/2}} V\left(\frac{2^{n/2} n!}{\sqrt{n+1}} V\left(\frac{R}{nr}\right)^{1/(n+1)}\right)^{1/n}. \tag{19}$$

(19) 式两边 $n/(n+1)$ 次方并整理即得(13) 式, 并且(13) 式中等号成立当且仅当  为正则单形.

定理 4 的证明  由定理 3 及引理 3, 得

$$R^n/V - n!\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right)^{1/2} \quad n!\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^{1/2}\left(\left(\frac{R}{nr}\right)-1\right) \quad n!\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right)^{1/2}$$
$$\frac{1}{(n+1)^2 n(n-1)}\left(\frac{d(\ ,\ )}{R}\right)^2 = \frac{n!}{n-1}\left(\frac{n^{n-2}}{(n+1)^{n+5}}\right)^{1/2}\left(\frac{d(\ ,\ )}{R}\right)^2,$$
$$\left(\prod_{i=0}^{n} m_i\right)^{n/(n+1)}/V - \frac{n!(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}} \quad \frac{n!(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}}\left(\left(\frac{R}{nr}\right)^{1/(n+1)^2}-1\right) \quad \frac{n!(n+1)^{(n-1)/2}}{n^{n/2}}$$
$$\frac{1}{(n+1)^4 n(n-1)}\left(\frac{d(\ ,\ )}{R}\right)^2 = \frac{n!}{n-1}\left(\frac{(n+1)^{n-9}}{n^{n+2}}\right)^{1/2}\left(\frac{d(\ ,\ )}{R}\right)^2.$$

即(14), (15) 式成立, 并且由引理 3 知(14), (15) 式中等号成立当且仅当  为正则单形.

参考文献:


[1] MINKOWSKI H. Volumen und Oberfl che [J]. Math. Ann., 1903, 57: 447-495.

[2] BONNESEN T. Probl mes des Isop rim tres de Is piphanes [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

[3] GROEMER H. Stability Theorems for Projections and Central Symmetrization [J]. Arch. Math., 1991, 56: 394-399.

[4] GOODEY P R, GREOMER H. Stability Results for First Order Projection Bodies [J]. Poc. Amer. Math. Soc., 1990, 109: 1 103-1 134.

[5] GROEMER H. Stability Properties of Geometric Inequalities [J]. Amer. Math. Monthly, 1990, 97: 382-394.

[6] GROEMER H, SCHNEIDER R. Stability Estimates for Some Geometric Inequalities [J]. Bull. Lond. Math. Soc., 1991, 23: 67-74.

[7] GARDNER R J, VASSALLO S. Stability of Inequalities in the Dual Drun-Minkovskin Theory [J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 1999, 231: 368-587.

[8] GROEMER H. Stability of Geometric Inequalities [M] // GRUBER P M, WILLS J M. Handbook of Convexity. Amsterdam: North Holland, 1993: 125-150.

[9] 张 垚. n 维单形的 Janić R. R. 不等式的稳定性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2007, 28(5): 1-5.

[10] KROCHMAROS G. Una Limitazione Peril Volume di un Simplesso n-Dimensional Avente Spigolidi Date Lunghesse [J]. Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Naturs, 1974, 56(6): 876-879.

[11] 张 垚. 关于 n 维单形体积的二个不等式 [J]. 数学的实践和认识, 1988, 4: 71-74.

[12] 张 垚. Veljian-Korchmaros 不等式的改进 [J]. 数学杂志, 1990, 10(4): 414-419.

[13] MITRINVIC D, PECARIC J, VOLENCE V. Recent Advances in Geometric Inequalities [M]. Kluwer Academic Dordrecht, 1989.

[14] 张 垚. 涉及单形的中线长的两个的几何不等式 [J]. 湖南教育学院学报: 自然科学版, 1994, 12(5): 99-103.

[15] 张 垚. n 维单形中的三个含参数的几何不等式 [M] // 单 墫. 几何不等式在中国. 南京: 江苏教育出版社, 1996: 218-233.

[16] KLAMKIN M S. The Circumeradius-Inradius Inequality for a Simplex [J]. Math. Magazine, 1979, 52: 20-22.

[17] SANYAL A. Medians of a Simplex [J]. Amer. Math. Monthly, 1967, 74: 697-698.


# Stability Versions of Veljian-Korchmaros Inequality of an $n$-Simplex and Applications


ZHANG Yao

(Mathematics and Computer Science College, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)



**Abstract:** The author gives the stability versions of Veljian-Korchmaros inequality of an $n$-simplex. In application, the author also gives the stability versions of the inequalities concerning the volume, circumradius and median of an $n$-simplex.



**Key words:** stability versions; inequality of an $n$-simplex; volume; circumradius; median

(责任编辑 向阳洁)