第 30 卷　第 4 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 4
2009 年 7 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jul. 2009

文章编号: 1007- 2985(2009)04- 0034- 03

基于极小作用原理的 Lagrange 系统周期解的存在性*

张　俐
(湖南商务职业技术学院, 湖南 长沙　410205)

摘　要: 利用变分方法中的极小作用原理在一定的条件下讨论了 Lagrange 系统周期解的存在性. 介绍了极小作用原理, 给出了从讨论 Lagrange 系统的周期解的存在性到讨论相应的泛函临界点的存在性的转化, 在强制性条件下讨论了 Lagrange 系统周期解的存在性.

关键词: Lagrange 系统; 周期解; 极小原理
中图分类号: O177　　　　文献标识码: A

1　极小作用原理

设 X 是自反的 Banach 空间, 　是其上弱下半连续的泛函, 若　有一个有界的极小化序列, 则　在 X 上达到极小值.

利用极小作用原理来判断一个泛函是否存在极值的问题, 不同情况下需要有不同的条件和要求. 假设函数　连续, 对于　的任意一个极小化序列 $\{u_k\}$, 存在实数 u 使得　$(u) = \inf$　的充分条件是 $\{u_k\}$ 有子列收敛到实数 u. 如果没有对　适当的连续性假设, 这个条件不是充分的. 为了　$(u) = \inf$　, 必须加强条件使得类似于 $\lim_k$　(u_k)　　(u) 的不等式成立.

紧集(有界闭集) 上的连续函数必下方有界且达到下确界, 即在 $\mathbf{R}^N$ 中, 函数的收敛的极小化序列的存在性等价于有界序列的存在性. 由于变分学、最优化和数学物理的需要, 有必要将这些结果推广到无穷维空间. 又因为自反的 Banach 空间的有界集是弱列紧的, 而以上领域中出现的空间许多是自反的空间, 通过引进弱连续(弱下半连续) 的定义, 就可以在有界集上考虑许多重要的泛函的极值问题.

2　Lagrange 系统周期解存在性

考虑 Lagrange 系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_y L(t, u(t), u(t)) = D_x L(t, u(t), u(t)), \\ u(0) - u(T) = u(0) - u(T) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $T > 0$. Lagrange 函数

$$L: [0, T] \quad \mathbf{R}^N \quad \mathbf{R}^N \quad \mathbf{R},\ x = (x_1, x_2, \quad, x_N),\ y = (y_1, y_2, \quad, y_N),\ x, y \quad \mathbf{R}^N,$$

$L(t, x, y) = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) y_i y_j + V(t, x)$, a_{ij}　$C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ $(i, j = 1,\quad, N)$, $V: [0, T]$　$\mathbf{R}^N$　$\mathbf{R}$ 满足条件(A):

$V(t, x)$ 对于每个 x　$\mathbf{R}^N$ 关于 t 是可测的, 对 a. e. t　$[0, T]$ 关于 x 是连续可微的, 且存在 a　$C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, b　$L^1([0, T]; \mathbf{R}^+)$, 使得 $| V(t, x) |$　$a(| x |) b(t)$, $|$　$V(t, x) |$　$a(| x |) b(t)$ 对所有 x　$\mathbf{R}^N$ 和

* 收稿日期: 2009- 06- 10
作者简介: 张　俐(1973-), 女, 湖南怀化人, 湖南商务职业技术学院讲师, 湖南农业大学硕士研究生.

a. e. t 　$[0, T]$ 成立.

当 $a_{ij} = 1$ 时, (1) 式约化为下列形式:

$$\begin{cases} (t) = \quad V(t, u(t)), \\ u(0) - u(T) = u(0) - u(T) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

即为二阶 Hamilton 系统.

用变分法研究二阶 Hamilton 系统就是将(2) 式的解的问题转化为求泛函

$$(u) = \frac{1}{2}\ {}_0^T |\ u(t)|^2 \mathrm{d}t + {}_0^T V(t, u(t)) \mathrm{d}t.$$

在 Hilbert 空间 H_T^1 上的临界点问题, 其中

$$H_T^1 = \{u: [0, T] \quad \mathbf{R}^N \mid u \text{ 绝对连续}, u(0) = u(T), u \quad L^2(0, T; \mathbf{R}^N)\},$$

具有范数

$$u \quad = ({}_0^T |\ u(t)|^2 \mathrm{d}t + {}_0^T |\ u(t)|^2 \mathrm{d}t)^{1/2}.$$

特别地, 若　在 H_T^1 上达到最小值, 则(2) 有周期解. 在条件(A) 下, 泛函是弱下半连续的, 只要　有一个有界的极小化序列, 由极小作用原理就能保证　达到极小值. 而　的强制性能推出　的每一个极小化序列都是有界的. 因此, 要得出周期解存在性, 关键是给出 V 各种不同的条件来保证　有有界的极小化序列.

3　强制性条件下的相关结论

考虑系统(1) 及二阶 Hamilton 系统(2). 强制性条件是当 $|x|$ 　　时, $V(t, x)$ 关于 t 　$[0, T]$ 一致地趋于+　, 其相关结论如下:

定理 1[1]　设 $V(t, x)$ 满足条件(A), 且当 $|x|$ 　　时, $V(t, x)$ 对 a. e. t 　$[0, T]$ 一致地趋于+　, 则系统(2) 在空间 H_T^1 中至少有 1 个解使得　达到极小值.

定理 2[2]　设 $V(t, x)$ 满足条件(A), 且当 $|x|$ 　　时, $V(t, x)$ 对 a. e. t 　$[0, T]$ 一致地趋于+　, 若 e 　$L^1(0, T; \mathbf{R}^N)$ 满足 ${}_0^T e(t) \mathrm{d}t = 0$, 则系统

$$\begin{cases} (t) = \quad V(t, (t)) + e(t), \\ u(0) - u(T) = u(0) - u(T) = 0 \end{cases}$$

至少有 1 个解使得　达到极小值.

如果位势函数为凸函数, 那么有以下结果:

定理 3[2]　若 V 满足条件(A), 当 $|x|$ 　　时, ${}_0^T V(t, x) \mathrm{d}t$ 　+　, 且 $V(t, x)$ 对 a. e. t 　$[0, T]$ 是凸的, 则系统(2) 在空间 H_T^1 中至少有 1 个解使得　达到极小值.

笔者考虑 Lagrange 系统, 在文献[3] 中, 位势函数分为两部分的情况, 分别满足强制性条件和有界性条件, 在次条件下得到解的存在性结果.

定理 4[3]　设文献[4] 中条件(L) 成立, 假定 $V = V_1 + V_2$, V_1 和 V_2 满足文献[4] 中条件(V), 且当 $|x|$ 　　时对几乎所有的 t 　$[0, T]$, 一致地有 $V_1(t, x)$ 　+　. 若存在常数 C_0 　$\mathbf{R}$ 和函数 g 　$L^1(0, T; \mathbf{R}^+)$, 使得对所有的 x 　$\mathbf{R}^N$ 和几乎所有的 t 　$[0, T]$ 有 $|D_x V_2(t, x)|$ 　$g(t)$, 且对所有的 x 　$\mathbf{R}^N$ 有 ${}_0^T V_2(t, x) \mathrm{d}t$ 　C_0, 则 Lagrange 系统(1) 至少有 1 个解极小化　.

笔者在以上定理的基础上推广了强制性条件, 结论如下:

定理 5　若 $V(t, x)$ 满足条件(A), $V(t, x) = V_1(t, x) + V_2(t, x)$, 其中 $V_1(t, x)$ 满足条件: 当 $|x|$ 　　时,

$${}_0^T V_1(t, x) \mathrm{d}t \quad + \quad , \tag{3}$$

并且 $V_1(t, x)$ 对 a. e. t 　$[0, T]$ 关于 x 是凸的. $V_2(t, x)$ 满足: 存在 $h(t)$ 　$L^1(0, T; \mathbf{R}^+)$, 使得 $V_2(t, x)$ 　$h(t)$, 则系统(1) 在空间 H_T^1 中至少有 1 个解使得　达到极小值.

证明 根据假设,在 $\mathbf{R}^N$ 上定义实函数 $x \to \int_0^T V_1(t,x)\mathrm{d}t$,则有1个极小点 x_0,使得 $\int_0^T \nabla V_1(t,x_0)\mathrm{d}t = 0$. 令 $\{u_k\}$ 为 φ 的一个极小化序列,由文献[2]及Sobolev不等式,得

$$
\begin{aligned}
\varphi(u_k) &= \frac{1}{2}\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T (V_1(t,u_k) + V_2(t,u_k))\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T V_1(t,x_0)\mathrm{d}t + \\
&\int_0^T h(t)\mathrm{d}t + \int_0^T (\nabla V_1(t,x_0), u_k - x_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T V_1(t,x_0)\mathrm{d}t + \\
&\int_0^T h(t)\mathrm{d}t + \int_0^T (\nabla V_1(t,x_0), \tilde u_k(t))\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T V_1(t,x_0)\mathrm{d}t + \\
&\int_0^T h(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^T |\nabla V_1(t,x_0)|\mathrm{d}t\right)\|\tilde u_k\|_\infty \geq \\
&\frac{1}{2}\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t - C_1 - C_2\left(\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

其中: $u_k = \bar u_k + \tilde u_k$; $\bar u_k = (1/T)\int_0^T u_k(t)\mathrm{d}t$; $C_1, C_2 > 0$. 所以存在常数 $C_3 > 0, C_4 > 0$,使得

$$
\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t \leq C_3. \tag{4}
$$

由Sobolev不等式得到 $\|\tilde u_k\|_\infty \leq C_4$,所以 $\{\tilde u_k\}$ 有界.

由 V_1 的凸性,对a.e. $t \in [0,T]$ 及所有 $k \in \mathbf{N}$,

$$
V_1(t,\bar u_k/2) = V_1\left(t,\frac{1}{2}(u_k(t) - \tilde u_k(t))\right) \leq \frac{1}{2}V_1(t,u_k(t)) + \frac{1}{2}V_1(t,-\tilde u_k(t)).
$$

所以

$$
\varphi(u_k) \geq \frac{1}{2}\int_0^T |\dot u_k(t)|^2\mathrm{d}t + 2\int_0^T V_1(t,\bar u_k/2)\mathrm{d}t - \int_0^T V_1(t,-\tilde u_k)\mathrm{d}t + \int_0^T h(t)\mathrm{d}t.
$$

由(4)及条件(A),存在 $C_5 > 0$,使得 $\varphi(u_k) \geq 2\int_0^T V_1(t,\bar u_k/2)\mathrm{d}t - C_5$,所以由条件(3),$\{\bar u_k\}$ 有界,从而 $\{u_k\}$ 有界. 根据极小作用原理,定理5得证.

参考文献:

[1] BERGER M S, SCHECHTER M. On the Solvobailty of Semi-Linear Gradient Operator Equations [J]. Adv. Math., 1977, 25: 97-132.

[2] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[3] 谭少班,唐春雷. 关于非自治Lagrange系统的可解性[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 1999, 24(2): 151-155.

[4] 林淑容,王 缨,吴行平. 两类Lagrange系统的周期解[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2001, 26(3): 243-246.

Periodic Solutions of Some Lagrange Systems Based on Least Action Principle

ZHANG Li

(Hunan Vocational College of Commerce, Changsha 410205, China)

Abstract: The periodic solutions of some Lagrange systems with suitable conditions are studied through the least action principle theorems in variational methods. The author presents some applications of the least principle on Lagrange systems. The author introduces the results obtained by the least action principle and the study of the transformation of the periodic solutions of Lagrange systems to the solutions of corresponding Euler equation. The periodic solutions of some Lagrange systems are studied with the coercivity conditions.

Key words: Lagrange systems; periodic solutions; least principle

(责任编辑 向阳洁)