文章编号: 1007-2985(2010)05-0005-03

广义 Mersenne数中的奇完全数*

乐茂华
(湛江师范学院数学系, 广东 湛江 524048)

摘 要: 设 p 是奇素数, a 和 b 是适合 $a > b$, $\gcd(a, b) = 1$ 的正整数. 设 $f(a, b, p) = (a^p - b^p)/(a - b)$. 运用初等数论方法证明了当 $\log a \leqslant \max(7\log p, (2^{p-1} - 1)\log p)$ 时, $f(a, b, p)$ 不是奇完全数.

关键词: 广义 Mersenne数; 奇完全数; 下界
中图分类号: O156.7 文献标志码: A

1 问题的提出及主要结果

对于正整数 x, 设 $\sigma(x)$ 是 x 的不同约数之和. 若 x 适合

$$\sigma(x) = 2x, \tag{1}$$

则称 x 是完全数. 早在古希腊时代, Euclid就已经在著名的《Elements》一书中给出了完全数的定义, 并且证明了: 若 p 和 $2^p - 1$ 都是素数, 则

$$x = 2^{p-1}(2^p - 1) \tag{2}$$

必为偶完全数. 由此可知 6, 28, 496等都是偶完全数. 2 000多 a后, L. Euler[1] 进一步证明了: 若 x 是偶完全数, 则 x 必可表成(2)之形, 其中 p 和 $2^p - 1$ 都是素数. 同时, 由于迄今未发现奇完全数, 因此奇完全数的存在性一直是数论中引人关注的课题(参见文献[2]的问题 B1).

2 000 a以来, 人们开始讨论某些特殊形状正整数中的奇完全数. 例如: F. Luca[3] 证明了任何 Fermat数 $2^{2^n} + 1$ 都不是奇完全数; 沈忠华等[4] 证明了当 a, b 是适合 $a > b$, $\gcd(a, b) = 1$ 以及 $a \not\equiv b \pmod 2$ 的正整数时, $a^{2a} + b^{2a}$ 不是奇完全数; 李伟勋[5] 证明了任何 Mersenne数 $2^p - 1$ 都不是奇完全数.

设 p 是奇素数, a 和 b 是适合 $a > b$ 以及 $\gcd(a, b) = 1$ 的正整数. 设

$$f(a, b, p) = \frac{a^p - b^p}{a - b}. \tag{3}$$

由于从(3)可知 $f(2, 1, p) = 2^p - 1$ 就是通常的 Mersenne数, 因此 $f(a, b, p)$ 统称为广义 Mersenne数. 笔者运用初等数论方法证明了以下一般性结果:

定理 1 $\log a \leqslant \max(7\log p, (2^{p-1} - 1)\log p)$ 时, $f(a, b, p)$ 都不是奇完全数.

因为奇素数 $p \geqslant 3$, 所以根据上述定理直接可得以下推论:

推论 1 当 $a \leqslant 2\ 187$ 时, $f(a, b, p)$ 都不是奇完全数.

显然, 文献[5]中的结果是上述推论的特例. 另外, 笔者提出以下猜想:

猜想 1 任何广义 Mersenne数都不是奇完全数.

2 相关引理

引理 1 若 $x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ 是正整数 x 的标准分解式, 则

* 收稿日期: 2010-04-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971184)
作者简介: 乐茂华(1952-), 男, 上海市人, 湛江师范学院数学系教授, 主要从事数论研究.

$$\sigma(x)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{r_i+1}-1}{p_i-1}.$$

证明参见文献[6]的定理1.9.1.

引理2 $f(a,b,p)$的素数因数q都满足$q\equiv 1(\bmod 2^p)$.

证明参见文献[6]的定理5.12.1的证明过程.

引理3 若x是奇完全数,则x的标准分解式必可表成

$$x=q_0^{r_0}q_1^{2r_1}\cdots q_k^{2r_k}\qquad k>7. \tag{4}$$

其中:q_0是适合$q_0\equiv 1(\bmod 4)$的奇素数;r_0是适合$r_o\equiv 1(\bmod 4)$的奇数;$q_i(i=1,\cdots,k)$是适合

$$q_1<\cdots<q_k,\ q_0\neq q_i\qquad i=1,\cdots,k \tag{5}$$

的奇素数;$r_i(i=1,\cdots,k)$是正整数.

证明参见文献[7].

引理4 若$f(a,b,p)$是奇完全数,则$f(a,b,p)$的标准分解式必可表成

$$f(a,b,p)=q_0^{r_0}q_1^{2r_1}\cdots q_k^{2r_k}\qquad k>7. \tag{6}$$

其中:$q_j(j=0,1,\cdots,k)$是适合(5)式以及

$$q_0\equiv 1(\bmod 4p),\ q_i\equiv 1(\bmod 2p)\qquad i=1,\cdots,k \tag{7}$$

的奇素数;$r_j(j=0,1,\cdots,k)$是适合

$$r_0\equiv 1(\bmod 4p),\ p\mid r_i\qquad i=1,\cdots,k \tag{8}$$

的正整数.

证明 根据引理3可知此时的$f(a,b,p)$的标准分解式适合(5)和(6)式,又从引理2可知它的素因数$q_j(j=0,1,\cdots,k)$满足(7)式.根据完全数的定义(1)和引理1,从(6)式可知

$$\sigma(f(a,b,p))=(q_0+1)\left(\frac{q_0^{(r_0+1)/2}+1}{q_0+1}\right)\left(\frac{q_0^{(r_0+1)/2}-1}{q_0-1}\right)\prod_{i=1}^{k}\frac{q_i^{2r_i+1}-1}{q_i-1}=2q_0^{r_0}q_1^{2r_1}\cdots q_k^{2r_k}. \tag{9}$$

因为从(9)式可知$(q_i^{2r_i-1}-1)/(q_i-1)(i=1,\cdots,k)$是$q_0,q_1,\cdots,q_{i-1},q_{i+1},\cdots,q_k$中某些数的方幂的乘积,所以从(7)式可知

$$\frac{q^{2r_i}+1}{q_i-1}\equiv 2r_i+1\equiv 1(\bmod 2p)\qquad i=1,\cdots,k. \tag{10}$$

从(10)式可知$r_i(i=1,\cdots,k)$是适合(8)式的正整数.同理可证$r_0\equiv 1(\bmod 4p)$.证毕.

3 定理的证明

根据引理4可知,当$f(a,b,p)$是奇完全数时,它的标准分解式适合(5)至(8)式.因为从(3)式可知$f(a,b,p)<a^p$,故从(5)至(8)式可得

$$a^p>f(a,b,p)>(q_1\cdots q_k)^{2p}>\left(\prod_{i=1}^{k}2pi\right)^{2p}=((2p)^k k!)^{2p}. \tag{11}$$

根据Stirling公式可知$k!>(k/e)^k$,故从(11)式可知

$$a^p>\left(\frac{2pk}{e}\right)^{2pk}. \tag{12}$$

从(12)式可得

$$\log a>2k(\log k+\log p+\log 2-1). \tag{13}$$

若$k\geqslant(\log a)/\log p$,则从(13)式可得$\log\log p+1>\frac{1}{2}\log p+\log\log a+\log 2$这一矛盾,故必有

$$k<\frac{\log a}{\log p}. \tag{14}$$

因为从(6)式可知$k\geqslant 7$,所以从(14)式可得$\log a>7\log p$.

另一方面,根据完全数的定义(1)和引理1,从(6)式可知

$$2=\frac{\sigma(f(a,b,p))}{f(a,b,p)}=\left(1+\frac{1}{q_0}+\cdots+\frac{1}{q_0^{r_0}}\right)\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{q_i}+\cdots+\frac{1}{q_i^{2r_i}}\right). \tag{15}$$

因为对于任何素数 q和正整数 r都有

$$1+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q^{r}}<\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{q^{s}}=1+\frac{1}{q-1}, \tag{16}$$

所以从 (15) 和 (16) 式可知

$$2<\prod_{j=0}^{k}\left(1+\frac{1}{q_j-1}\right). \tag{17}$$

再从 (5), (7) 和 (17) 式可得

$$2<\prod_{j=0}^{k}\left(1+\frac{1}{2p(j+1)}\right). \tag{18}$$

由于

$$\log\left(1+\frac{1}{2p(j+1)}\right)=\frac{2}{4p(j+1)+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2s+1}\left(\frac{1}{4p(j+1)+1}\right)^{2s}<$$

$$\frac{4}{4p(j+1)+1}<\frac{1}{p(j+1)}\qquad j=0,1,\cdots,k, \tag{19}$$

因此从 (18) 和 (19) 式可知

$$\log 2<\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+1}, \tag{20}$$

根据文献[6]第 363页的注释可知

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+1}<\log(k+1)+\gamma, \tag{21}$$

其中 $\gamma=0.5772$是 Euler常数, 故从 (20) 和 (21) 式可得

$$p\log 2<\log(k+1)+\gamma. \tag{22}$$

由于 $e^{\gamma}<2$, 因此从 (14) 和 (22) 式可得 $\log a>(2^{p-1}-1)\log p$.

综上所述可知: 当 $\log a\leqslant\max(7\log p,(2^{p-1}-1)\log p)$时, $f(a,b,p)$不是奇完全数. 证毕.

参考文献:

[1] EULER L. De Numerls Amicabilibus [J]. Comm. Arith., 1849, 2(4): 627-636.

[2] GUY R K. Unsolved Problems in Number Theory [M]. Beijing: Science Press, 2007: 71-74.

[3] LUCA F. The Anti-Social Fermat Numbers [J]. Amer Math Monthly, 2000, 107(2): 171-173

[4] 沈忠华, 于秀源. 关于数论函数 $\sigma(n)$的一点注记 [J]. 数学研究与评论, 2007, 27(1): 123-129.

[5] 李伟勋. Mersenne数 M_p 都是孤立数 [J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 693-696.

[6] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979: 13-14.

[7] HAGIS P. Every Odd Perfect Number has at Least 8 Prime Factors [J]. Math Comput, 1980, 34(6): 1 027-1 032.

Odd Perfect Numbers in Generalized Mersenne Numbers

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong China)

Abstract Let p be an odd prime, a and b be coprime positive integers with $a>b$, $\gcd(a,b)=1$. more over let $f(a,b,p)=(a^p-b^p)/(a-b)$. Using some elementary number theory methods, it is proved that if $\log a\leqslant\max(7\log p,(2^{p-1}-1)\log p)$, $f(a,b,p)$ is not an odd perfect number.

Key words generalized Mersenne number; odd perfect number; lower bound

(责任编辑 向阳洁)