第 31卷 第 5期 吉首大学学报 (自然科学版) Vol 31 No 5
2010年 9月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Sept 2010

文章编号: 1007- 2985(2010) 05- 0008- 03

恰有 5个极大子群的有限群*

游兴中, 王香芬, 陈为敏
(长沙理工大学数学与计算科学学院, 湖南 长沙 410114)

摘 要: 研究了有限群的极大子群的个数对群结构的影响, 刻画了恰有 5 个极大子群的有限群的结构.

关键词: 有限群; 极大子群; 共轭
中图分类号: O152. 1 文献标志码: A

极大子群是有限群的一类十分重要的子群, 在有限群结构的研究中有非常关键的作用. 有限群的极大子群的数量性质能够反映该群的许多性质. 如文献[1- 2]证明了极大子群共轭类类数为 2的有限群必可解, 文献[3- 4]刻画了极大子群同阶类类数不大于 3的有限群, 文献[5]刻画了非正规极大子群同阶类类数为 2的有限群, 文献[6]刻画了极大子群的个数小于 5的有限群的结构. 笔者继续文献[6]的工作, 刻画恰有 5个极大子群的有限群的结构.

1 相关定义与引理

若 M 是有限群 G的极大子群, 则 $\{M^g \mid g \in G\}$ 为 M 在 G中的一个共轭类, 也称为 M 的一个轨道, 其轨道长为 $|G:N_G(M)|$. 对自然数 n, $\pi(n)$ 表示 n的所有素数因子的集合. 对有限群 G, 记 $\pi(G) = \pi(|G|)$. 文中其他未加说明的术语和记号都是标准的(可参见文献[7]).

引理 1 设 G是有限群且 N　G. S为 G的所有极大子群的集合, S为 G/N 的所有极大子群的集合, 则 $S = \{M/N \mid M \in S \text{且} MN < G\}$.

证明 假定 $M \in S$且 $N \leqslant M$, 则 $G = MN$. 因此当 $M \in S$ 且 $MN < G$时必有 $N \leqslant M$, 于是 M/N 为 G/N 的极大子群. 反之, 若 M/N 为 G/N 的极大子群, 则 M 显然为 G 的极大子群.

引理 2 设 G是有限群, $\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini子群.

(i) M 是 G 的极大子群当且仅当 $M/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的极大子群;

(ii) M_1 和 M_2 是 G 的不同的极大子群当且仅当 $M_1/\Phi(G)$ 和 $M_2/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的不同的极大子群.

由极大子群和 Frattini子群的定义可得引理 2成立.

引理 3[7] 设 G 是 p^n 阶初等交换 p-群, 则 G 的 p^m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ 阶子群的个数为 $(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)\cdots(p^{n-m+1} - 1)/(p^m - 1)(p^{m-1} - 1)\cdots(p - 1)$.

引理 4 设 G是有限 p-群, 且 $|G/\Phi(G)| = p^d$, 则 G的极大子群的个数为 $\dfrac{p^d - 1}{p - 1}$. 特别地, 若 G 非循环, 则 $p = 2$时, G的极大子群的个数不小于 3; 当 $p > 2$时, G 的极大子群的个数不小于 4

证明 由引理 2, G的极大子群的个数等于 $G/\Phi(G)$的极大子群的个数. 因为 $G/\Phi(G)$ 为 p^d 阶初等交换群, 所以 $G/\Phi(G)$ 的极大子群的阶为 p^{d-1}. 由引理 3可知 $G/\Phi(G)$ 的 p^{d-1} 阶子群的个数为 $\dfrac{p^d - 1}{p - 1}$, 若 G非

* 收稿日期: 2010- 04- 04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671026, 10871205); 湖南省科技计划研究项目(2010FJ4136); 湖南省教育厅资助科研项目(10A002)
作者简介: 游兴中(1968-), 男, 湖南桃源人, 长沙理工大学数学与计算科学学院教授, 博士, 主要从事群论研究.

循环, 由 Burnside基定理得 $d \geqslant 2$, 因此引理 4成立.

引理 5 设 G是幂零群且 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_s$ 为其 Sylow子群的直积. 令 $|P_i / \Phi(P_i)| = p_i^{d_i}$, 则 G 恰有 $\sum_{i=1}^{s} \frac{p_i^{d_i} - 1}{p_i - 1}$个极大子群.

证明 现在断言, M 是 G的极大子群当且仅当对某个 i, $M = P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times M_i \times P_{i+1} \times \cdots \times P_s$, 其中 M_i 是 P_i 的极大子群.

首先, 若 M_i 是 P_i 的极大子群, 则 $|P_i : M_i| = p_i$, 于是 $|G : M| = p_i$, 即 M 是 G 的极大子群; 其次, 若 M 是 G的极大子群, 则 $|G : M| = p_i$. 于是当 $j \neq i$时, $P_j \leqslant M$. 因为 M 是幂零群, 所以 $M = P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times M_i \times P_{i+1} \times \cdots \times P_s$, 其中 M_i 是 P_i 的子群, 因此 $|P_i : M_i| = p_i$, 于是 M_i 是 P_i 的极大子群.

假定 $M = P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times M_i \times P_{i+1} \times \cdots \times P_s$ 及 $N = P_1 \times \cdots \times P_{j-1} \times N_j \times P_{j+1} \times \cdots \times P_s$ 是 G 的极大子群, 则由上面的断言 $M = N$ 当且仅当 $i = j$ 且 $M_i = N_j$, 因此 G 的极大子群的个数等于它的所有 Sylow 子群的极大子群的个数之和. 因为 P_i 是 G的唯一的 Sylow p_i - 子群, 由引理 4, P_i 恰有 $\frac{p_i^{d} - 1}{p_i - 1}$个极大子群, 于是引理 5成立.

引理 6[6] 设 G是有限群, 则: (i) 若 G的所有极大子群共轭, 则 G为素数幂阶循环群. 特别地, G有唯一极大子群; (ii) G 恰有 2个极大子群当且仅当 G 为 2个不同的素数幂阶循环群的直积.

引理 7 设 G是有限群, M 是 G 的极大子群, 则或者 $M \quad G$ 或者 $N_G(M) = M$ 且 $|G : N_G(M)| \geqslant 3$

证明 若 M 是 G的非正规的极大子群, 则 $M \leqslant N_G(M) < G$, 所以 $M = N_G(M)$. 若 $|G : N_G(M)| = 2$, 则 $|G : M| = 2$, 从而 $M \quad G$, 矛盾.

引理 8[8] 设 G是有限群, N 为 G 的正规交换子群. 若 $N \cap \Phi(G) = 1$, 则 N 在 G中有补, 即存在 $A \leqslant G$ 使得 $G = AN$ 且 $A \cap N = 1$.

引理 9 设 G是有限群, N 为 G 的交换的极小正规子群. 若 $\Phi(G) = 1$, 则 N 在 G 中有补, 即 $G = MN$ 且 $M \cap N = 1$对某个 $M \leqslant G$. 进一步, 若 $N \nleqslant Z(G)$, 则 M 是 G 的非正规的极大子群.

证明 由引理 8, N 在 G中有补是显然的. 假定 $N \nleqslant Z(G)$ 且 M 是 N 在 G 中的补. 首先, 若 M 在 G中正规, 则 $G = N \times M$, 从而 $N \leqslant Z(G)$, 矛盾, 所以 M 在 G中不正规; 其次, 若 M 不是 G 的极大子群, 令 K 是 G的包含 M 的极大子群, 则 $K = G \cap K = NM \cap K = (N \cap K)M$, 因此 $1 < N \cap K \quad K$, 但 $NK = G$, 所以由 N 交换得 $N \cap K \quad G$, 与 N 的极小性矛盾, 故 M 是 G 的极大子群.

2 定理及其证明

定理 1 设 G是有限幂零群, 则 G 恰有 5个极大子群当且仅当 G是下列群之一:

(i) $G = P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5$, 其中 $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 为循环群;

(ii) $G = P_1 \times P_2 \times P_3$, 其中 $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 且 P_1 为二元生成的 2 - 群, P_2和 P_3 为循环群;

(iii) $G = P_1 \times P_2$, 其中 $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 且 P_1 为二元生成的 3 - 群, P_2 为循环群.

证明 充分性是显然的. 下证必要性.

G为幂零群, 所以 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_s$, 其中 $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. 令 $|P_i / \Phi(P_i)| = p_i^{d_i}$. 由引理 5, $s \leqslant 5$.

若 $s = 5$, 则每个 P_i 只能有 1个极大子群, 于是 $d_i = 1$, 即 P_i 为素数幂阶循环群. 因此 G为 5个不同素数幂阶循环群的直积, G 为 (i) 型群.

若 $s = 4$, 则至少有 1个 d_i, 不妨设 $d_1 \geqslant 2$, 于是 P_1非循环. 由引理 4, P_1至少有 3个极大子群, 从而 G至少有 6个极大子群, 矛盾.

若 $s = 3$, 类似于上面的推理, 可以假定 $d_1 \geqslant 2$. 若 $p_1 > 2$, 则由引理 4知 P_1 至少有 4个极大子群. 从而 G 至少有 6个极大子群, 矛盾. 因此 $p_1 = 2$. 若 $d_1 > 2$, 由引理 4, P_1 至少有 7个极大子群, 矛盾. 因此 $d_1 = 2$, 此时 P_1 恰有 3个极大子群. 因此 P_2 和 P_3 各只能有 1个极大子群, 从而 P_2 和 P_3 为循环群, 此时 G为 (ii) 型群.

若 $s = 2$, 则 $G = P_1 \times P_2$. 由引理 4和引理 5, P_1 和 P_2 中有 1个 (设为 P_1) 恰有 4个极大子群, P_2 恰有

1个极大子群. 由$\frac{p_1^{d_1}-1}{p_1-1}=4$, 得 $d_1=2$ 且 $p_1=3$. 因此 P_1 为二元生成的 3−群, P_2 为循环群, 此时 G 为(iii)型群.

若 $s=1$, 则 $G=P_1$ 且 $\frac{p_1^{d_1}-1}{p_1-1}=5$, 易见矛盾.

定理 2 设 G 是有限非幂零群, 则 G 恰有 5个极大子群当且仅当 G 为下列情形之一的可解群:

(i) $G/\Phi(G)\cong A_4$ 且 $G=PQ$, 其中 $P\in \mathrm{Syl}_2(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_3(G)$ 且 P G, Q 为 G 的非正规循环子群;

(ii) $G/\Phi(G)=\langle a,b,c \mid a^3=b^p=c^2, ab=ba, bc=cb, c^{-1}ac=a^2\rangle$, 其中 p 为不同于 2, 3的素数.

证明 易见充分性成立. 下证必要性.

首先断言 G 为可解群. 令 G 为极小反例. 由引理 1, G 的任意同态像的极大子群的个数不大于 5, 所以可设 G 有唯一极小正规子群 N 且 G/N 可解而 N 不可解. 假定 $C_G(N)\neq 1$. 因为 $C_G(N)$ G, 所以 $N\leqslant C_G(N)$, 从而 N 为交换群, 与 N 不可解矛盾, 故必有 $C_G(N)=1$. 若 N 包含于 G 的每一个极大子群, 则 $N\geqslant\Phi(G)$, 但由 $\Phi(G)$ 幂零得 N 可解, 矛盾, 于是有 G 的极大子群 M 使得 $N\nleqslant M$, 因此 $G=MN$ 且 $M\cap N<N$. 令 p 是 $|N:M\cap N|$ 的素因子, $P\in \mathrm{Syl}_p(N)$. 因为 N 不可解, 所以 $P<N$. 由于 N 是 G 的唯一极小正规子群, 因此 P 在 G 中不正规, 即有 $N_G(P)<G$. 令 K 是 G 的包含 $N_G(P)$ 的极大子群. 易见 M, K 在 G 中不共轭, 因为 $M\cap N$, $K\cap N$ 阶不同, 且 M, K 的轨道长都不小于 3, 于是 G 至少有 6个极大子群, 矛盾.

令 $G=G/\Phi(G)$. 由引理 2, G 恰有 5个极大子群. 令 $F(G)$ 为 G 的 Fitting子群. 由断言, G 可解. 因为 $\Phi(G)=1$, 所以 G 的极小正规子群为初等交换群且 $F(G)$ 是 G 的极小正规子群的积, 因此 $F(G)$ 是交换群. 由引理 8, $G=AN$, 其中 $A\cap N=1$, $N=F(G)$. 令 $N=U\times Z(G)$, 其中 $U\cap Z(G)=1$. 显然 U 是 G 的极小正规子群的直积, 于是令 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_s$, 其中 $U_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是 G 的交换的极小正规子群. 注意到若 K 是 G 的 2阶的正规子群, 则必有 $K\leqslant Z(G)$, 因此 $|U_i|\geqslant 3(1\leqslant i\leqslant s)$. 由引理 8, U_i 在 G 中有补, 令 M_i 是 U_i 在 G 中的补子群. 由引理 9, M_i 为 G 的非正规的极大子群, 因此与 M_i 共轭的极大子群的个数为 $|G:N_G(M_i)|=|G:M_i|=|U_i|\geqslant 3$. 故由条件推出 $s=1$, 即 U 本身是 $G=(U\times Z(G))A$ 的极小正规子群. 于是 $M=Z(G)A$ 为 G 的极大子群, 且轨道长为 $|U|$. 因为 G 非幂零, 所以由引理 6, G 至少有 2个极大子群的共轭类. 从而由条件得 $3\leqslant|U|\leqslant 4$.

情形 Ⅰ 若 $|U|=4$, 则 $U\cong Z_2\times Z_2$. 此时 G/U 恰有 1个极大子群, 从而 G/U, 即 $Z(G)A$ 为素数幂阶循环群, 必有 $Z(G)=1$. 于是 $G=UA$ 且 A 忠实作用在 U 上, 因此 $A\leqslant \mathrm{Aut}(U)=S_3$. 由 A 循环得 $A=Z_3$, 于是 $G=UA=(Z_2\times Z_2)Z_3\cong A_4$, 即 $G/\Phi(G)\cong A_4$.

因为 $\pi(G)=\pi(G/\Phi(G))=\pi(A_4)=\{2,3\}$, 所以 G 为 $\{2,3\}$−群. 令 $P\in \mathrm{Syl}_2(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_3(G)$. 由上面的推理可知, $H=P\Phi(G)$ 为 G 的正规极大子群且 $|G:H|=3$, $K=Q\Phi(G)$ 为 G 的非正规极大子群且 $|G:K|=4$. 因为 $|G:N_G(P)|$ 为 3的方幂, 若 $N_G(P)<G$, 则 $N_G(P)\leqslant H$, 因此 $H=N_G(H)$, 与 H G 矛盾, 所以 $N_G(P)=G$, 即 P G. 由 G 非幂零得 Q 不在 G 中正规是显然的. 令 M_1, M_2 为 Q 的极大子群, 则 PM_1, PM_2 为 G 的极大子群, 且 $|G:PM_1|=|G:PM_2|=3$, 因此 $PM_1=PM_2=N$. 令 $x\in M_1$, 则存在 $y\in P$ 和 $z\in M_2$ 使得 $x=yz$, 于是 $y=xz^{-1}\in P\cap Q$, 因此 $x=z$, 从而 $M_1\subseteq M_2$. 同理可得 $M_1=M_2$, 这样 Q 有唯一的极大子群, 因而 Q 为循环群. 此时 G 为(i)−型群.

情形 Ⅱ 若 $|U|=3$, 则 $U\cong Z_3$, 易见 G/U 的极大子群至多有 2个, 故 G/U 为幂零群.

假定 G/U 恰有 1个极大子群, 则 G/U, 亦即 $Z(G)A$ 为素数幂阶循环群. 同样有 $Z(G)=1$. 此时 $G=UA$ 且 A 忠实作用在 U 上, 因此 $A\leqslant \mathrm{Aut}(U)=Z_2$, 由 A 循环得 $A=Z_2$, 于是 $G=UA\cong S_3$. 此时 G 恰有 4个极大子群, 矛盾.

假定 G/U 恰有 2个极大子群, 则 $Z(G)A$ 恰有 2个极大子群. 由引理 6, $Z(G)A$ 为 2个不同的素数幂阶循环群的直积, 从而为 $Z(G)A$ 交换群. 类似于上面的推理得 $A=Z_2$. 因此 $|Z(G)|=p$, 其中 p 是不同于 2, 3的素数. 令 $U=\langle a\rangle$, $Z(G)=\langle b\rangle$, $A=\langle c\rangle$, 则有 $G=\langle a,b,c \mid a^3=b^p=c^2=1, ab=ba, bc=cb, c^{-1}ac=a^2\rangle$. 此时 G 为(ii)−型群.

(下转第 25页)

[3] LI Bang-he, WANG Jing-hua. The Global Qualitative Study of Solutions to a Conservation Law [J]. Sci. Special Math. Issue, 1979: 12-24.
[4] SCHAEFFER D G. A Regularity Theorem for Conservation Laws [J]. Adv. Math., 1973, 11: 368-386.
[5] TANG Tao, WANG Jing-hua, ZHAO Yin-chuan. On the Piecewise Smoothness of Entropy Solutions to Scalar Conservation Laws for a Larger Class of Initial Data [J]. J. Hyperbol. Differ. Eq., 2007, 4: 369-389.
[6] ZHAO Yin-chuan, TANG Tao, WANG Jing-hua. Regularity and Global Structure of Solutions to Hamilton-Jacobi Equations I Convex Hamiltonians [J]. J. Hyperbol. Differ. Eq., 2008, 5(3): 663-680.
[7] ZHAO Yin-chuan, TANG Tao, WANG Jing-hua. Regularity and Global Structure of Solutions to Hamilton-Jacobi Equations II Convex Initial Data [J]. J. Hyperbol. Differ. Eq., 2009, 6(4): 709-723.
[8] ZHAO Yin-chuan. The Properties of the Characteristics of Solutions to Hamilton-Jacobi Equations I [J]. Journal of Jishou University, 2010, 31(1): 13-15.

Hamilton-Jacobi方程特征线的性质 II

赵引川
(华北电力大学数理系, 北京　102206)

摘　要: 研究了带凸 Hamiltonian的高维 Hamilton-Jacobi (HJ)方程特征线的性质. 证明了所有的特征线分 2类, 其中一类永远不会碰到奇异点, 另一类将在有限的时间内碰到奇异点.

关键词: Hamilton-Jacobi方程; 特征线; 非退化(退化)最小值点; Hopf-Lax公式
中图分类号: O175.17　　文献标识码: A

(责任编辑　向阳洁)

(上接第 10页)

参考文献:

[1] ADNAN S. On Grous Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups [J]. Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. Enat., 1979, 66: 175-178.
[2] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups II [J]. Ibid., 1980, 68: 179.
[3] 施武杰. 极大子群同阶类类数不大于 2的有限群 [J]. 数学年刊: A辑, 1985(5): 532-537.
[4] 黎先华. 极大子群同阶类类数 = 3的有限群 [J]. 数学学报, 1994(1): 108-115.
[5] 李世荣. 非正规极大子群同阶类类数等于 2的有限群 [J]. 数学学报, 1990(3): 388-392.
[6] 王立中. 极大子群个数 < 5的有限群 [J]. 首都师范大学学报: 自然科学版, 2000, 21(3): 10-13.
[7] 徐明曜. 有限群论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
[8] HUPPERT B. Endlich Gruppen I [M]. Berlian: Springer-Verlag, 1979.

Finite Groups with Just 5 Maximal Subgroups

YOU Xing-zhong, WANG Xiang-fen, CHEN Wei-min
(College of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: How the number of maximal subgroups of a finite group influences its structure is investigated. The structure of a finite group with just five maximal subgroups is determined.

Key words: finite group; maximal subgroup; conjugacy

(责任编辑　向阳洁)