第 31 卷 第 2 期
2010 年 3 月

吉首大学学报(自然科学版)
Journal of Jishou University (Natural Science Edition)

Vol. 31 No. 2
Mar. 2010

文章编号: 1007-2985(2010)02-0001-02

无零因子环的刻画及各种环的例子*

陈祥恩

(西北师范大学数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 总结了刻画一个环是无零因子环的若干等价条件. 给出了各种环的例子, 以期更好地理解各种环之间的关系.

关键词: 环; 无零因子环; 刻画

中图分类号: O175 文献标识码: A

环是近世代数中的一个很基本的概念, 对环的教学也显得尤为重要. 根据笔者的教学实践, 首先总结了刻画一个环是无零因子环的若干等价条件, 然后给出了各种环的例子, 以期更好地理解各种环之间的关系. 所用术语如无特别说明请参看文献[1].

1 无零因子环的刻画

设 R 是一个环, a 是 R 中的一个非零元. 如果存在 R 中非零元 b 使得 $ab=0$, 那么称 a 为 R 的一个左零因子. 同理可定义右零因子. 如果一个环没有左零因子, 那么称它为无零因子环. 先给出刻画一个环是无零因子环的若干充要条件.

定理 1 设 R 是一个环. 下述几条彼此等价:

1) R 中左消去律成立, 即 $\forall a, b, c \in R$, 一旦 $ab = ac$, $a \neq 0$, 就有 $b = c$;

2) R 是无零因子环;

3) R 中没有"既是左零因子又是右零因子"的元;

4) R 中没有右零因子;

5) R 中右消去律成立, 即 $\forall a, b, c \in R$, 一旦 $ba = ca$, $a \neq 0$, 就有 $b = c$;

6) R 中任意 2 个非零元的乘积还是非零元;

7) $\forall a, b \in R$, 一旦 $ab = 0$, 就有 $a = 0$ 或者 $b = 0$.

2 各种环的例子

先用文氏图给出环、交换环、有单位元的环、无零因子环、整环、除环以及域之间的关系. 如图 1 所示, 方框的内部表示所有环的集合. 包含数字 2, 5, 6, 7, 8 的圆的内部表示所有交换环的集合. 包含数字 4, 6, 7, 8, 9, 10 的圆的内部表示所有含单位元的环的集合. 包含数字 3, 5, 7, 8, 9, 10 的圆的内部表示所有无零因子环的集合. 虚线的内部表示所有除环的集合.

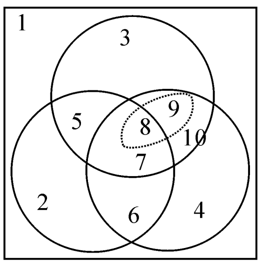

图 1 各种环的关系

* 收稿日期: 2009-11-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771091); 西北师范大学数学与应用数学专业代数课程(校级及省级)教学团队经费资助(2009-07)
作者简介: 陈祥恩(1965-), 男, 甘肃天水人, 西北师范大学数学与信息科学学院教授, 主要从事代数与图证研究.

为了更好地理解环、交换环、有单位元的环、无零因子环、整环、除环以及域之间的关系,下面给出各种环的例子. 用 E 表示所有能够被 2 整除的整数所组成的集合, 用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集.

例 1 令

$$R_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in E\right\}.$$

R_1 关于矩阵的加法、乘法作成环. R_1 不是交换环, 不是有单位元的环, 也不是无零因子环.

例 2 设$(\mathbf{Z}, +)$ 是整数加群. 对 $\forall\ a, b \in \mathbf{Z}$, 令 $a \circ b = 0$, 则$(\mathbf{Z}, +, \circ)$ 是交换环, 但不是有单位元的环, 也不是无零因子环.

例 3 令

$$R_2 = \left\{\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in E\right\}.$$

R_2 关于矩阵的加法、乘法作成环. R_2 不是交换环, 不是有单位元的环, 但它是无零因子环.

例 4 设$M_n(F)$ 表示数域F 上全体$n(>1)$ 阶方阵所构成的集合. $M_n(F)$ 关于矩阵的加法、乘法作成环. $M_n(F)$ 是有单位元的环, 但它不是交换环, 不是无零因子环.

例 5 E 关于整数的加法、乘法构成一个环. 它是交换环、无零因子环, 但它不是有单位元的环.

例 6 设 $n(>1)$ 是合数, 则模 n 的剩余类环 $\mathbf{Z}_n$ 是交换环、有单位元的环, 但它不是无零因子环.

例 7 设整数环 $\mathbf{Z}$ 是整环, 但它不是域.

例 8 设 $p(>1)$ 是素数, 则模 p 的剩余类环 $\mathbf{Z}_p$ 是域.

例 9 四元数除环是除环, 但不是域[1].

例 10 令

$$R_3 = \left\{\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z}\right\}.$$

R_3 关于矩阵的加法、乘法作成环. R_3 是有单位元的环、无零因子环, 但它不是交换环, 不是除环.

参考文献:

[1] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 第 1 版. 北京:高等教育出版社, 1978.

Characterization for Rings Without Zero Divisor and Examples of Various Rings

CHEN Xiang-en

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The equivalence conditions for characterizing rings without zero divisor are summarized and the examples of various rings are given in this paper.

Key words: ring; ring without zero divisor; characterization

(责任编辑 向阳洁)