第 31 卷　第 2 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 31　No. 2
2010 年 3 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Mar. 2010

文章编号: 1007-2985(2010)02-0003-04

(弱)(n,d)-环以及 n-凝聚环的有限直和*

李伟庆, 欧阳柏玉
(湖南师范大学数学与计算机科学学院, 湖南 长沙　410081)

摘　要: 设 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 是环. 证明了: (1) $\bigoplus_{i=1}^m R_i$ 是右 (n,d)-环(分别地, 弱右 (n,d)-环, 右 n-凝聚环) 当且仅当每个 R_i 是右 (n,d)-环(分别地, 弱右 (n,d)-环, 右 n-凝聚环); (2) $rD(\bigoplus_{i=1}^m R_i) = \sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\}$; (3) $wD(\bigoplus_{i=1}^m R_i) = \sup\{wD(R_1), wD(R_2), \cdots, wD(R_m)\}$.

关键词: (弱)(n,d)-环; (n,d)-内射模; (n,d)-平坦模; n-表现模; n-凝聚环; (弱)整体维数
中图分类号: O154.2　　文献标识码: A

1　问题的提出

文中所有的环都是结合环, 模都指酉模; n 和 d 都是非负整数; $rD(R)(wD(R))$ 表示一个环 R 的右整体维数(弱整体维数).

为后文所需, 先回顾一些概念. 设 R 是环. 将一个右 R-模 P 称为 n-表现模[1-3], 若存在一个右 R-模正合列

$$F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to P \to 0,$$

其中每个 F_i 是有限生成自由模(或者, 等价地, 有限生成投射模), $i = 0, 1, \cdots, n$. 容易看出, 一个模是 0-表现模(1-表现模) 当且仅当它是有限生成模(有限表现模). 一个环 R 被称作右 n-凝聚环[2], 如果每一个 n-表现右 R-模是 $(n+1)$-表现的. 显然, R 是右 0-凝聚环(右 1-凝聚环) 等价于 R 是右 Noether 环(右凝聚环).

设 M 是一个右 R-模. M 被称作 (n,d)-内射模[4], 如果对任意一个 n-表现右 R-模 N 有 $Ext_R^{d+1}(N,M) = 0$. M 被称作 (n,d)-投射模[5], 如果对任意一个 (n,d)-内射右 R-模 N 有 $Ext_R^1(M,N) = 0$. 设 A 是一个左 R-模. A 被称作 (n,d)-平坦模[4], 若如果对任意一个 n-表现右 R-模 B 有 $Tor_{d+1}^R(B,A) = 0$. 根据定义容易验证 (n,d)-内射模、(n,d)-平坦模, 以及 (n,d)-投射模对于有限直和以及直和项都是封闭的. 环 R 被称作一个右 (n,d)-环[2,4], 如果每一个 n-表现右 R-模的投射维数不超过 d. 若每一个 n-表现右 R-模的平坦维数不超过 d, 则 R 被称作右弱 (n,d)-环[4]. 容易看出, R 是一个右 (n,d)-环当且仅当任意一个右 R-模是 (n,d)-内射模, 而 R 是一个右弱 (n,d)-环当且仅当任意一个左 R-模是 (n,d)-平坦模. 当 n, d 取不同的值时, (n,d)-环可以表示一些众所周知的环类, 比如半单环、右遗传环、von Neumann 正则环、右半遗传环等. (n,d)-环和 n-凝聚环已经被很多专家[1-2,4-7]研究过.

设 $S \geqslant R$ 是一个 almost excellent extension[8]. 在文献[3-4]中证明了: R 是一个右 (n,d)-环(分别地, 右弱 (n,d)-环, 右 n-凝聚环) 当且仅当 S 是一个右 (n,d)-环(分别地, 右弱 (n,d)-环, 右 n-凝聚环). 很自然地, 当然要问这些环类在有限直和以及直和项下是否封闭. 笔者给出了肯定的回答. 设 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 是环. 证明了: (1) $\bigoplus_{i=1}^m R_i$ 是右 (n,d)-环(分别地, 右弱 (n,d)-环, 右 n-凝聚环) 当且仅当每个 R_i 是右 (n,d)-环(分别地, 右弱 (n,d)-环, 右 n-凝聚环); (2) $rD(\bigoplus_{i=1}^m R_i) = \sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\}$;

* 收稿日期: 2009-09-12
基金项目: 湖南省教育厅科学研究项目(07C575)
作者简介: 李伟庆(1980-), 男, 湖南永州人, 湖南师范大学数学系硕士研究生, 主要从事相对同调代数研究
通讯作者: 欧阳柏玉(1954-), 女, 湖南师范大学数学与计算机科学学院教授, 主要从事同调代数与 k-理论研究.

(3)$wD(\prod_{i=1}^{m}R_i) = \sup\{wD(R_1), wD(R_2), \cdots, wD(R_m)\}$. 作为推论, 得到了一些众所周知的结果(比如得到了 $\prod_{i=1}^{m}R_i$ 是半单环当且仅当每个 R_i 是半单环).

2 相关相理

下文中, $_RM(M_R)$ 表示左(右)R- 模.

引理 1　设 $f: R\rightarrow S$ 为一个满环同态. 如果 M_S 是一个右 S- 模(从而是一个右 R- 模), A_R 是一个右 R- 模, 则以下陈述成立:

(ⅰ) $M\otimes_R S_S \cong M_S$;

(ⅱ) 如果 A_R 是一个有限生成的右 R- 模, 那么 $A\otimes_R S_S$ 是一个有限生成的右 S- 模;

(ⅲ) M_S 是一个有限生成的右 S- 模当且仅当 M_R 是一个有限生成的右 R- 模.

证明　(ⅰ) 注意到 $M\otimes_S S_S\cong M_S$, 再利用张量积的泛性质即知(ⅰ) 成立.

(ⅱ) 显然, S 是一个循环 R- 模. 根据条件, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 A 的生成元. 很容易验证 $x_1\otimes 1_S, x_2\otimes 1_S, \cdots, x_n\otimes 1_S$ 是 $A\otimes_R S_S$ 的生成元, 其中 1_S 表示 S 的单位元. 故 $A\otimes_R S_S$ 是有限生成的右 S- 模.

(ⅲ) 设 M_S 是一个有限生成的右 S- 模, 并且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 M 的生成元, 则有 $M = x_1S + x_2S + \cdots + x_nS$. 由于 $f: R\rightarrow S$ 是一个满环同态, 得到 $M = x_1R + x_2R + \cdots + x_nR$, 因此 M_R 是一个有限生成的右 R- 模. 反过来的结论可以由(ⅰ) 和(ⅱ) 直接得到.

引理 2　设 $f: R\rightarrow S$ 为一个满环同态, M_S 是一个右 S- 模. 如果 S_R 和 $_RS$ 都是投射模, 那么 M_S 是一个 n- 表现右 S- 模当且仅当 M_R 是一个 n- 表现右 R- 模($n = 1$ 的情形已经在文献[9] 中得到了证明).

证明　$n = 0$ 的情形可以由引理 1 直接得到. 所以下面假定 $n > 0$.

必要性. 设 M 是一个 n- 表现右 S- 模, 那么存在以下右 S- 模正合列 $0\rightarrow K\rightarrow P_{n-1}\rightarrow\cdots\rightarrow P_1\rightarrow P_0\rightarrow M\rightarrow 0$, 其中 K 是有限生成模, P_i 是有限生成投射模, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. 根据引理 1, 每个 P_i 以及 K 都是有限生成的右 R- 模. 由于 S_R 是投射模, 因此得到每一个 P_i 是投射右 R- 模. 故 M 是一个 n- 表现右 R- 模.

充分性. 设 M 是一个 n- 表现右 R- 模, 那么存在以下右 S- 模正合列 $0\rightarrow K\rightarrow P_{n-1}\rightarrow\cdots\rightarrow P_1\rightarrow P_0\rightarrow M\rightarrow 0$, 其中 K 是有限生成模, P_i 是有限生成投射模, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. 既然 $_RS$ 是投射模, 那么序列

$$0\rightarrow K\otimes_R S_S\rightarrow P_{n-1}\otimes_R S_S\rightarrow\cdots\rightarrow P_1\otimes_R S_S\rightarrow P_0\otimes_R S_S\rightarrow M\otimes_R S_S\rightarrow 0$$

也是正和列. 根据引理 1, $M\otimes_R S_S\cong M_S$, 并且 $K\otimes_R S_S$ 和每一个 $P_i\otimes_R S_S$ 都是有限生成的右 S- 模. 由于每个 P_i 是投射右 R- 模, 因此每个 $P_i\otimes_R S_S$ 是投射右 S- 模, 从而 M 是一个 n- 表现右 S- 模.

引理 3　设 $f: R\rightarrow S$ 为一个满环同态, M_S 是一个右 S- 模, $_SA$ 是一个左 S- 模. 若 S_R 和 $_RS$ 都是投射模, 则以下陈述成立:

(ⅰ) M_S 是一个 (n, d)- 内射右 S- 模当且仅当 M_R 是一个 (n, d)- 内射右 R- 模;

(ⅱ) $_SA$ 是一个 (n, d)- 平坦左 S- 模当且仅当 $_RA$ 是一个 (n, d)- 平坦左 R- 模;

(ⅲ) 若 R 是一个右 n- 凝聚环, 则 S 也是一个右 n- 凝聚环.

证明　(ⅰ) 必要性. 设 M_S 是一个 (n, d)- 内射右 S- 模. 对任意 n- 表现右 R- 模 N_R, 类似于引理 2 的证明, 得到 $N\otimes_R S_S$ 是一个 n- 表现右 S- 模. 由文献[10], 有

$$\mathrm{Ext}_R^{d+1}(N_R, M_R)\cong\mathrm{Ext}_S^{d+1}(N\otimes_R S_S, M_S) = 0.$$

因此, M_R 是一个 (n, d)- 内射右 R- 模.

充分性. 设 M_R 是一个 (n, d)- 内射右 R- 模. 对任意 n- 表现右 S- 模 N_S, 由引理 1 知 $N\otimes_R S_S\cong N_S$. 由引理 2 知 N_R 是一个 n- 表现右 R- 模. 再根据文献[10], 有

$$\mathrm{Ext}_S^{d+1}(N_S, M_S)\cong\mathrm{Ext}_S^{d+1}(N\otimes_R S_S, M_S)\cong\mathrm{Ext}_R^{d+1}(N_R, M_R) = 0.$$

因此, M_S 是一个 (n, d)- 内射右 S- 模.

(ⅱ) 必要性. 设 $_SA$ 是一个 (n, d)- 平坦左 S- 模. 如果 B_R 是一个 n- 表现右 R- 模, 那么 $B\otimes_R S_S$ 是一个 n- 表现右 S- 模. 由文献[10], 有

$$\mathrm{Tor}_{d+1}^{R}(B_R, {_RA})\cong\mathrm{Tor}_{d+1}^{S}(B\otimes_R S_S, {_SA}) = 0.$$

因此, ${}_RA$ 是一个 (n,d)- 平坦左 R- 模.

充分性. 设 ${}_RA$ 是一个 (n,d)- 平坦左 R- 模. 对任意 n- 表现右 R- 模 B_S, 由引理 1 知 $B\otimes_R S_S\cong B_S$, 由引理 2 知 B_R 是一个 n- 表现右 R- 模. 根据文献[10], 有

$$Tor_{d+1}^{S}(B_S,{}_SA)\cong Tor_{d+1}^{S}(B\otimes_R S_S,{}_SA)\cong Tor_{d+1}^{R}(B_R,{}_RA)=0,$$

故 ${}_SA$ 是一个 (n,d)- 平坦左 S- 模.

(iii) 设 M_S 是任意一个 n- 表现右 S- 模. 由引理 2 知 M_R 是一个 n- 表现右 R- 模. 由于 R 是一个右 n- 凝聚环, 因此 M_R 是一个 $(n+1)$- 表现右 R- 模. 再由引理 2 知 M_S 是一个 $(n+1)$- 表现右 S- 模, 从而 S 是一个右 n- 凝聚环.

引理 4[9]　设 R 和 S 都是环. 每一个右 $(R\oplus S)$- 模 M_R 存在唯一的分解 $M=A\oplus B$, 其中 $A=M(R,0)$ 是一个右 R- 模, $B=M(0,S)$ 是一个右 S- 模, 其运算法则为 $xr=x(r,0)\ (x\in A,\ r\in R)$, $ys=y(0,s)\ (y\in B,\ s\in S)$.

3　主要结果

定理 1　设 S 和 T 是环, 记 $R=S\oplus T$, 则以下陈述成立:

(i) R 是一个右 (n,d)- 环, 当且仅当 S 和 T 都是右 (n,d)- 环;

(ii) R 是一个右弱 (n,d)- 环, 当且仅当 S 和 T 都是右弱 (n,d)- 环;

(iii) R 是一个右 n- 凝聚环, 当且仅当 S 和 T 都是右 n- 凝聚环.

证明　根据引理 3, (i), (ii), (iii) 的必要性是成立的, 下面来证明其充分性.

(i) 假定 S 和 T 都是右 (n,d)- 环. 根据引理 4, 对任意右 R- 模 M_R, 存在唯一的分解 $M=A\oplus B$, 其中 A 是一个 (n,d)- 内射右 S- 模, B 是一个 (n,d)- 内射右 T- 模. 由引理 3, A 和 B 都是 (n,d)- 内射右 R- 模, 从而 M 是一个 (n,d)- 内射右 R- 模. 故 R 是一个右 (n,d)- 环.

(ii) 证明过程类似于(i) 的证明, 略去.

(iii) 假定 S 和 T 都是右 n- 凝聚环. 设 M_R 是一个 n- 表现右 R- 模. 根据引理 4, M 存在唯一的分解 $M=A\oplus B$, 其中 A 是一个右 S- 模, B 是一个右 T- 模. 显然 A 和 B 都是 n- 表现右 R- 模. 由引理 2, A 是一个 n- 表现右 S- 模, B 是一个 n- 表现右 T- 模. 既然 S 和 T 都是右 n- 凝聚环, 那么 A 是一个 $(n+1)$- 表现右 S- 模, B 是一个 $(n+1)$- 表现右 T- 模. 根据引理 2, A 和 B 都是 $(n+1)$- 表现右 R- 模. 从而 $M=A\oplus B$ 是一个 $(n+1)$- 表现右 R- 模, 即 R 是一个右 n- 凝聚环.

推论 1　设 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 是环, 则以下陈述成立:

(i) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是右 (n,d)- 环当且仅当每个 R_i 是右 (n,d)- 环;

(ii) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是右弱 (n,d)- 环当且仅当每个 R_i 是右弱 (n,d)- 环;

(iii) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是右 n- 凝聚环当且仅当每个 R_i 是右 n- 凝聚环.

文献[2, 4] 证明了, 环 R 是一个右 $(0,0)$- 环(分别地, 右 $(0,1)$- 环, 右 $(1,0)$- 环, 右 $(1,1)$- 环) 当且仅当 R 是半单环(分别地, 右遗传环, von Neumann 正则环, 右半遗传环); $rD(R)\leqslant d$ (分别地, $wD(R)\leqslant d$) 当且仅当 R 是一个右 $(0,d)$- 环(分别地, 右弱 $(1,d)$- 环).

推论 2　设 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 是环, 则以下陈述成立:

(i) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是半单环当且仅当每个 R_i 是半单环[11];

(ii) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是右遗传环当且仅当每个 R_i 是右遗传环;

(iii) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是右半遗传环当且仅当每个 R_i 是右半遗传环;

(iv) $\oplus_{i=1}^{m}R_i$ 是 von Neumann 正则环当且仅当每个 R_i 是 von Neumann 正则环;

(v) $rD(\oplus_{i=1}^{m}R_i)\leqslant d$ 当且仅当 $rD(R_i)\leqslant d,\ i=1,2,\cdots,m$;

(vi) $wD(\oplus_{i=1}^{m}R_i)\leqslant d$ 当且仅当 $wD(R_i)\leqslant d,\ i=1,2,\cdots,m$.

证明　直接由推论 1 以及文献[2] 或文献[4] 得到.

推论 3　设 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 是环, 则以下陈述成立:

(i) $rD(\oplus_{i=1}^{m}R_i)=\sup\{rD(R_1),rD(R_2),\cdots,rD(R_m)\}$;

(ii) $wD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i) = \sup\{wD(R_1), wD(R_2), \cdots, wD(R_m)\}$.

证明 (i) 为了证明 $rD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i) \leqslant \sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\}$, 不妨假定 $\sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\} = d < \infty$. 由此得到 R_i 是右 $(0, d)$- 环, $i = 1, 2, \cdots, m$. 根据推论 1 知 $\bigoplus_{i=1}^{m}R_i$ 也是右 $(0, d)$- 环. 故有 $rD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i) \leqslant d$. 同理可证 $rD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i) \geqslant \sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\}$.

(ii) 证明类似于(i), 略去.

命题 1[4] 若 R 是一个右 (n, d)- 环, 则 R 是一个右弱 (n, d)- 环. 又若 $n \geqslant d + 1$, 则其逆也成立. 特别地, 若 R 是一个右 n- 凝聚环, 则 R 是一个右 (n, d)- 环当且仅当 R 是一个右弱 (n, d)- 环.

推论 4 设 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 是环. 若 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 都是右 n- 凝聚环, 或者如果 $n \geqslant d + 1$, 则以下陈述等价:

(i) $\bigoplus_{i=1}^{m}R_i$ 是一个右 (n, d)- 环;

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{m}R_i$ 是一个右弱 (n, d)- 环;

(iii) R_i 是右弱 (n, d)- 环, $i = 1, 2, \cdots, m$;

(iv) R_i 是右 (n, d)- 环, $i = 1, 2, \cdots, m$.

证明 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) 以及 (i) $\Leftrightarrow$ (iv) 可以由定理 1 得到; (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) 直接由命题 1 得到.

在推论 4 中取 $n = 0$, 有:

推论 5 设 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 是右 Noether 环, 则数据 $rD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i)$, $wD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i)$, $\sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\}$, $\sup\{wD(R_1), wD(R_2), \cdots, wD(R_m)\}$ 是相等的.

注 1 由推论 5 得到一个众所周知的结果, 即若 R 是一个右 Noether 环, 则 $rD(R) = wD(R)$.

注 2 根据定理 1 知道右 (n, d)- 环、右弱 (n, d)- 环, 以及右 n- 凝聚环对有限直和以及直和项封闭. 但是, 一般地, 这些环类对可数无限直和(积) 并不封闭. 例如, Z_2 是一个 $(0, 0)$- 环(从而是 Noether 环), 但若 I 是一个无穷集, 则 $\bigoplus_I Z_2$ 和 $\prod_I Z_2$ 都不是 $(0, 0)$- 环.

参考文献:

[1] CHEN J, DING N. On n-Coherent Rings [J]. Comm. Algebra., 1996, 24: 3 211-3 216.

[2] COSTA D L. Parameterizing Families of Non-Neotherian Rings [J]. Comm. Algebra., 1994, 22: 3 997-4 011.

[3] XUE W. On Presented Modules and Almost Excellent Extensions [J]. Comm. Algebra., 1999, 27: 1 091-1 102.

[4] ZHOU D X. On n-Coherent Rings and (n, d)-Rings [J]. Comm. Algebra., 2004, 32: 2 425-2 441.

[5] MAO L X, DING N Q. Relative Projective Modules and Relative Injective Modules [J]. Comm. Algebra., 2006, 34: 2 403-2 418.

[6] MAHDOU N. On Costa's Conjecture [J]. Comm. Algebra., 2001, 29: 2 775-2 785.

[7] DOBBS D E, MAHDOU N. When Is $D+M$ n-Coherent and an (n, d)-Domain? Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 205 [M]. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999: 257-270.

[8] XUE W. On Almost Excellent Extensions [J]. Algebra Colloq., 1996, 3: 125-134.

[9] MAO L X, DING N Q. FP-Projective Dimensions [J]. Comm. Algebra., 2005, 33: 1 153-1 170.

[10] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York: Academic Press, 1979.

[11] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and Categories of Modules [M]. 2nd Edition. New York: Spring-Verlag, 1992.

Finite Direct Sums of (Weak) (n, d)-Rings and n-Coherent Rings

LI Wei-qing, OUYANG Bai-yu

(College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: Let $R_1, R_2, \cdots, R_m$ be rings. It is proved that (1) $\bigoplus_{i=1}^{m}R_i$ is a right (n, d)-ring (resp. weak (n, d)-ring, n-coherent ring) if and only if each R_i is a right (n, d)-ring (resp. weak (n, d)-ring, n-coherent ring); (2) $rD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i) = \sup\{rD(R_1), rD(R_2), \cdots, rD(R_m)\}$; (3) $wD(\bigoplus_{i=1}^{m}R_i) = \sup\{wD(R_1), wD(R_2), \cdots, wD(R_m)\}$.

Key words: (weak) (n, d)-ring; (n, d)-injective module; (n, d)-flat module; n-presented module; n-coherent ring; (weak) global dimension

(责任编辑 向阳洁)