

文章编号:1007-2985(2011)06-0005-06

图 $P_m \times P_3 (n=11+8k)$ 的点可区别全染色与算法*

包世堂¹, 韩晓红¹, 李沐春², 文 飞²

(1. 兰州城市学院信息工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 兰州交通大学应用数学研究所, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中取 4 个数字的所有组合, 经三角排序后任意相邻 2 个组合都有 3 个相同数字. 利用此结果和组合性质 $\binom{n+8k}{3} - \binom{n}{3} \equiv 0 \pmod{4}$ 构造算法, 并证明当 $n=11+8k (k=0, 1, \dots)$ 和 $\binom{n-1}{4}/2+2 < m \leq \binom{n}{4}/2+2$ 时积图 $P_m \times P_3$ 的点可区别全染色数为 n .

关键词: 积图; 点可区别全染色; 点可区别全染色数; 三角排序

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

图的全染色^[1] 被称为点可区别的, 即对任意 2 个不同点的相关联元素所染颜色构成的色集合不同. 其所用的最少颜色数称为点可区别的全染色数^[2-4]. 文献[5-8] 对梯图的点可区别全染色进行了研究. 笔者现利用三角排序的结果和组合性质 $\binom{n+8k}{3} - \binom{n}{3} \equiv 0 \pmod{4}$ 构造算法, 研究 $P_m \times P_3$ 的点可区别全染色.

1 预备知识

定义 1 对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中取 4 个数字的所有组合进行如下排序:

123n 124n 125n ... 12(n-2)n 12(n-1)n
123(n-1) 124(n-1) 125(n-1) ... 12(n-2)(n-1)
...
1234
1345 1346
1356
...
13(n-1)n 13(n-2)n 13(n-3)n ... 134n
145n 146n 147n ... 14(n-2)n 14(n-1)n
145(n-1) 146(n-1) 147(n-1) ... 14(n-2)(n-1)
...

* 收稿日期: 2011-06-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11061017); 甘肃省教育厅科研项目(1111B-04)

作者简介: 包世堂(1970-), 男, 甘肃定西人, 兰州城市学院信息工程学院副教授, 主要从事信息与计算科学研究.

1456
 1567
 ...
 $1(n-3)(n-1)n \quad (n-3)(n-2)n$
 $1(n-2)(n-1)n$
 $2(n-2)(n-1)n$
 $2(n-3)(n-1)n \quad 2(n-3)(n-2)n$
 ...
 2345
 3456
 3467 3457
 ...
 $(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$
 $(n-3)(n-2)(n-1)n$

此序列称为所有组合的三角排序. 该序列有如下特点:

- (1) 三角序列包含了 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中取 4 个数字的所有组合;
- (2) 任意相邻 2 个组合都有 3 个相同数字.

这些排序规律和特点适用于图 $P_m \times P_3$ 的点可区别全染色.

定义 2 对于 2 个简单图 G 和 H , 卡氏积图 $G \times H$ 满足:

- (1) $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$;
- (2) $E(G \times H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1 = u_2 \text{ 且 } v_1 v_2 \in E(H), \text{ 或 } v_1 = v_2 \text{ 且 } u_1 u_2 \in E(G)\}$.

文中未说明的符号或术语见文献[9].

2 基本算法

集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中取 4 个数字的所有三角序列中, 每个组合包含 4 个数, 且由小到大排列. 用 s_k 表示一个组合, 并称之为染色元, s_{kj} 表示 s_k 中的第 j 个数 ($j=1, 2, 3, 4$), 于是 $s_{k1} < s_{k2} < s_{k3} < s_{k4}$. 对以上染色序列依 s_{k1} 编队. 按照 s_{k1} 的可能取值 $1, 2, \dots, n-3$ 将 s_k 分为 15 个队, 具体地, 当 $s_{k1} \equiv l \pmod{8}$ 时, 将 s_k 编为 l 队, 其中 $l=1, 2, \dots, 7$. 当 $l=0$ 时, 将 s_k 编为第 8 队; 而将 s_{k1} 的 7 个可能取值 $n-9, n-8, \dots, n-3$ 对应的 s_k 依次编为 9 队、10 队、...、15 队. 类似地, 对同一队的染色序列按 s_{k2} 的值分组, 当 $s_{k2} < n-8$ 时, 依次循环编组号为 1 组、2 组、...、8 组. 当 $s_{k2} \geq n-8$ 时依次编组号为 9 组、10 组、...、15 组. 将染色序列中的所有染色元从前向后两两配对, 每对中的第 1 个染色元染图 $P_m \times P_3$ 中的 u_i , 第 2 个染色元染 w_i . 各组中的倒数第 4 个染色元所在的 1 对及其后面 3 对组成该组的结点区, 其他的连续染色序列称为正常区. 若某一结点区后无正常区, 则将这一组所有染色元归为这一结点区. 显然, 对同一正常区中的 s_k 和 s_j , 有

$$s_{k1} = s_{j1}, s_{k2} = s_{j2} \quad k \neq j,$$

$$\{s_{k3}, s_{k4}\} \cap \{s_{k+1,3}, s_{k+1,4}\} = C_k \quad C_k \neq \emptyset \text{ 且 } |C_k| = 1.$$

记 $Q_k = \{s_{k3}, s_{k4}\} - C_k$, 则 $Q_k \neq Q_{k+1}$.

使用正常区中的染色元 s_k 对点 u_i 和 w_i 及其关联的边着色时, 将 s_{k1} 与 s_{k2} 分配给 $u_{i-1}u_i$ 与 $w_{i-1}w_i$ 及 $u_i u_{i+1}$ 与 $w_i w_{i+1}$. Q_k 和 Q_{k+1} 分配给点 u_i 和 w_i ; $u_i v_i$ 和 $v_i w_i$ 先分配相同色 C_k , 对 v_i 作全染色时再作调整; 结点区中的染色元很少, 只需给出一种 VDTG 即可. 通常对图 $P_m \times P_3$ 着色时, u_2 用第 1 个染色元着色, w_2 用第 2 个染色元着色, 依次类推.

由于点 $v_i (i=2, 3, \dots, m-1)$ 是四度点, 因此对它着色时, 需分配 5 种色. 当 $n=11+8k (k=0, 1, \dots)$ 时 $\binom{n}{5} > \binom{n}{4} / 2$, 所以当 $\binom{n-1}{4} / 2 + 2 < m \leq \binom{n}{4} / 2 + 2$ 时, 只需选出部分五元组合作点 v_i 的全染色, 对正

常区中的 v_i 染色方案 f 如下:

$$f(v_j) = \begin{cases} C_k - 1 & s_{k4} \neq s_{k+1,4}, \\ s_{i4} - 1 & s_{k4} = s_{k+1,4}, \min(s_{k3}, s_{k+1,3}) - 1 \leq s_{k2} \leq s_{k4}/2, \\ n & s_{k4} = s_{k+1,4}, \min(s_{k3}, s_{k+1,3}) - 1 \leq s_{k2}, s_{k2} \geq s_{k4}/2, \\ \min(s_{k3}, s_{k+1,3}) - 1 & s_{k4} = s_{k+1,4}, \min(s_{k3}, s_{k+1,3}) - 1 \geq s_{k2}. \end{cases}$$

$u_i v_i$ 和 $v_i w_i$ 染色时,交换点 u_i 和边 $u_i v_i$ 分配的颜色,边 $v_i w_i$ 的颜色保持不变,或者交换点 w_i 和边 $v_i w_i$ 分配的颜色,边 $u_i v_i$ 的颜色保持不变.

已知两染色元 $s_k, s_{k'}$ 满足:(1) s_{k1} 为奇数;(2) $s_{k'1} = s_{k1} + 1, s_{k'2} = s_{k2}, s_{k'3} = s_{k3}, s_{k'4} = s_{k4}, s_{k'5} = s_{k5}$. 用染色元 $s_k, s_{k'}$ 分别对点 v_i, v_j 着色时,若着色方案 f 满足以下条件,则称 f 为对称着色(见图 1,括号中的数字为分配给点 v_i 的颜色):

17911			27811		
7	9	1	2	11	7
7	11 (10)	1	2	8 (10)	1
8			11		
7	11	1	2	9	7
17811			27911		

图 1 对称着色

- (1) $f(v_{j-1} v_j) = \begin{cases} f(v_i v_{i+1}) & f(v_i v_{i+1}) \neq s_{k1}, \\ s_{k'1} & f(v_i v_{i+1}) = s_{k1}; \end{cases}$
- (2) $f(v_j) = \begin{cases} f(v_i) & f(v_i) \neq s_{k1}, \\ s_{k'1} & f(v_i) = s_{k1}; \end{cases}$
- (3) $f(v_j v_{j+1}) = \begin{cases} f(v_{i-1} v_i) & f(v_{i-1} v_i) \neq s_{k1}, \\ s_{k'1} & f(v_{i-1} v_i) = s_{k1}; \end{cases}$
- (4) $f(u_j v_j) = \begin{cases} f(v_i w_i) & f(v_i w_i) \neq s_{k1}, \\ s_{k'1} & f(v_i w_i) = s_{k1}; \end{cases}$
- (5) $f(v_j w_j) = \begin{cases} f(u_i v_i) & f(u_i v_i) \neq s_{k1}, \\ s_{k'1} & f(u_i v_i) = s_{k1}. \end{cases}$

根据三角序的排列特点,2 队、4 队、6 队、8 队等偶数队可分别与 1 队、3 队、5 队、7 队等奇数队作对称着色.

3 主要结果

由于图 $P_m \times P_3$ 的三度点个数为 $2(m-2)$,四度点个数为 $m-2$,因此可得:

引理 1 $\chi_{\alpha}(P_m \times P_3) \geq \min\{n \mid \binom{n}{4} \geq 2(m-2), \text{ 且 } \binom{n}{5} \geq m-2\}$.

定理 1 对图 $P_m \times P_3$ ($107 < m \leq 167$),有 $\chi_{\alpha}(P_m \times P_3) = 11$.

证明 根据引理 1 知,当 $107 < m \leq 167$ 时, $\chi_{\alpha}(P_m \times P_3) \geq 11$,仅需给出图 $P_m \times P_3$ 的 11-一点可区别全染色. 根据三角排序及以上算法,可得如图 2 所示的着色结果.

从而,定理 1 成立.

定理 2 对任意的正整数 $n=11+8k$ ($k=1,2,3,\dots$) 且 $\binom{n-1}{4}/2+2 < m \leq \binom{n}{4}/2+2$,则 $\chi_{\alpha}(P_m \times P_3) = n$.

根据三角排序、着色方法及组合了结论 $\binom{n+8k}{3} - \binom{n}{3} \equiv 0 \pmod{4}$,编写 C 语言程序(VC++ 在 PC 机上实现)得到着色结果. 图 3 给出了 $n=26$ 时图 $P_m \times P_3$ 的点可区别全染色的部分结果.

3	12311	12511	12711	12911	12310	12510	12710	12910	1249	1269
3	1(10)	1 5(4)	2 11(6)	1 9(8)	2 3(9)	1 10(4)	2 7(6)	1 10(8)	2 9(3)	1 6(5)
1	11	6	11	10	4	10	8	3	9	7
1	12411	12611	12811	121011	12410	12610	12810	1239	1259	1279
2	1289	1248	1268	1237	1257	1236	1256	1245	1345	1346
2	9(7)	1 8(3)	2 6(5)	1 3(6)	2 7(4)	1 6(5)	2 6(11)	1 5(10)	4 1(2)	3 4(5)
1	8	5	8	7	6	4	5	2	6	6
1	1238	1258	1278	1247	1267	1246	1255	1234	1356	1367
1	1357	1378	1358	1389	1369	1349	13810	13610	13410	13911
1	5(6)	3 7(5)	1 8(7)	3 8(6)	1 9(4)	3 4(8)	1 8(6)	3 10(4)	1 4(9)	3 9(7)
1	7	8	4	9	5	9	10	5	10	11
1	1347	1368	1348	1379	1359	13910	13710	13510	131011	13811
1	13711	13511	14511	14711	14911	14510	14710	14910	1469	1489
1	11(5)	3 1(10)	5 11(9)	1 7(6)	4 11(8)	1 5(9)	4 10(6)	1 10(8)	4 9(5)	1 9(7)
1	6	11	6	11	10	10	8	9	7	8
1	13611	13411	14611	14811	141011	14610	14810	1459	1479	1458
1	1468	1457	1456	1578	1589	1569	15810	15610	15911	15711
4	8(5)	1 5(11)	4 1(10)	5 8(11)	1 8(6)	5 9(8)	1 8(6)	5 10(9)	1 9(7)	5 11(4)
1	8	7	6	6	9	10	10	11	11	1
1	1478	1467	1567	1568	1579	15910	15710	151011	15811	15611
7	16711	16911	16710	16910	1689	1789	17810	17911	18911	18910
1	6(7)	5 11(8)	1 10(9)	6 9(8)	1 9(5)	7 9(6)	1 10(9)	7 1(10)	1 8(9)	11 1(6)
1	11	10	8	7	8	10	11	10	10	9
1	16811	161011	16810	1679	1678	17910	171011	17811	181011	191011
10	291011	281011	27811	271011	27910	2678	2679	26810	261011	26811
10	9(3)	11 10(9)	2 8(10)	7 11(9)	2 10(6)	7 8(5)	2 7(8)	6 8(9)	2 10(8)	5 11(7)
10	2	8	11	10	9	9	9	10	11	6
10	28910	28911	27911	27810	2789	2689	26910	26710	26911	26711
2	25611	25811	251011	25710	25910	2579	2568	2567	2467	2478
2	6(4)	5 11(7)	2 11(9)	5 10(6)	2 10(8)	5 9(6)	2 6(11)	5 6(10)	4 7(11)	2 7(5)
7	11	9	10	8	9	8	8	2	5	8
7	25711	25911	25610	25810	2569	2589	2578	2456	2457	2468
2	2458	2479	2459	24810	24610	241011	24811	24611	23411	23611
4	8(7)	2 7(5)	4 9(8)	2 8(6)	4 10(9)	2 10(8)	4 11(6)	2 6(9)	5 1(10)	3 6(5)
4	9	9	10	10	5	11	11	11	2	11
4	2489	2469	24910	24710	24510	24911	24711	24511	23511	23711
2	23811	231011	23510	23710	23910	2359	2379	2348	2368	2347
2	11(7)	3 10(9)	2 5(4)	3 10(6)	2 9(8)	3 5(4)	2 9(6)	3 4(7)	2 8(5)	3 7(6)
2	9	4	10	8	4	9	8	8	7	5
2	23911	23410	23610	23810	2349	2369	2389	2358	2378	2357
2	2367	2356	3456	3457	3468	3489	3469	34910	34710	34510
2	6(5)	3 6(1)	5 6(9)	4 5(6)	3 6(7)	4 8(6)	3 9(8)	4 10(7)	3 7(5)	4 10(9)
2	4	2	7	7	8	9	5	8	10	11
2	2346	2345	3467	3478	3458	3479	3459	34810	34610	341011
3	34911	34711	34511	35711	35911	35610	35810	3569	3589	3578
3	11(7)	4 7(3)	5 1(10)	4 7(6)	3 11(8)	5 6(9)	3 10(7)	5 6(8)	3 9(7)	5 8(11)
4	8	11	3	11	10	10	9	9	8	3
4	34811	34611	35611	35811	351011	35710	35910	3579	3568	3567
3	3678	3679	36810	361011	36811	37811	371011	37910	38910	38911
7	6(10)	3 9(8)	6 0(11)	3 10(8)	6 11(9)	3 7(10)	8 11(9)	3 0(11)	6 9(3)	2 3(5)
6	9	10	7	11	11	11	10	9	10	11
6	3689	36910	36710	36911	36711	37911	37810	3789	381011	391011
9	491011	481011	4789	47810	47911	46711	46911	46710	46910	4689
9	11(8)	3 10(4)	6 9(11)	4 10(9)	8 1(10)	4 7(9)	6 11(8)	4 7(11)	6 10(8)	4 9(10)
9	4	9	11	11	7	11	10	10	9	6
9	48911	48910	47910	471011	47811	46811	461011	46810	4679	4678
6	4567	4568	4579	45910	45710	451011	45811	45611	56811	561011
7	4(11)	5 8(7)	4 9(8)	5 9(7)	4 10(9)	5 10(8)	4 11(6)	7 4(8)	6 11(7)	5 10(9)
4	8	9	6	10	6	11	5	11	9	6
4	4578	4589	4569	45810	45610	45911	45711	56711	56911	56710
6	56810	5679	5678	57910	571011	57811	581011	591011	68910	68911
6	8(5)	11 9(10)	5 6(11)	7 10(6)	5 10(8)	9 11(6)	8 0(11)	7 5(10)	11 6(7)	9 8(10)
5	10	6	8	8	11	5	5	9	8	7
5	56910	5689	5789	57810	57911	58911	58910	691011	681011	67811
6	67911	67810	6789	781011	791011					
6	9	10	6	9	7	8	10	11	9	
6	11(7)	9 8(5)	6 8(11)	7 1(10)	8 7(9)	5				
6	10	10	10	9	11					
6	671011	67910	78910	78911	891011					

图 2 图 $P_m \times P_3$ 的 11-点可区别全染色着色结果

3	12327	12527	12727	12927	121127	121327	121527	121727	121927	122127
3	27 (26)	1 5 (4)	2 27 (6)	1 9 (8)	2 27 (10)	1 13 (12)	2 27 (14)	1 17 (16)	2 27 (18)	1 21 (20)
4	27	27	8	27	12	27	16	27	20	27
1	27 2	6 1	27 2	10 1	27 2	14 1	27 2	18 1	27 2	22 1
	12427	12627	12827	121027	121227	121427	121627	121827	122027	122227
1	131927	131727	131527	131327	131127	13927	13727	13527	14527	14727
1	27 (17)	3 17 (15)	1 27 (13)	3 13 (11)	1 27 (9)	3 9 (7)	1 27 (5)	3 1 (26)	5 27 (25)	1 7 (6)
18	27	27	14	27	10	27	6	27	6	27
1	27 3	16 1	27 3	12 1	27 3	8 1	27 3	4 1	27 4	8 1
	131827	131627	131427	131227	131027	13827	13627	13427	14627	14827
4	1469	1489	1468	1457	1456	1578	1589	1569	15810	15610
4	9 (5)	1 9 (7)	4 8 (5)	1 5 (27)	4 1 (26)	5 8 (27)	1 8 (6)	5 9 (8)	1 8 (6)	5 10 (9)
7	8	7	7	6	6	6	9	10	10	11
1	9 4	5 1	8 4	6 1	7 5	8 1	7 5	9 1	7 5	10 1
	1479	1458	1478	1467	1567	1568	1579	15910	15710	151011
6	16711	16911	16710	16910	1689	1789	17810	17911	171112	17912
1	7 (10)	6 11 (8)	1 10 (9)	6 9 (8)	1 9 (5)	7 9 (26)	1 10 (8)	11 1 (7)	27 1 (26)	7 12 (11)
11	10	8	7	8	10	7	8	12	8	8
1	8 6	11 1	10 6	9 1	6 7	9 1	10 11	1 7	10 1	12 7
	16811	161011	16810	1679	1678	17910	171011	17811	171012	17812
8	181314	181013	181213	181012	18911	18910	191112	191213	191013	191214
8	14 (12)	1 13 (9)	8 13 (11)	1 12 (9)	8 11 (27)	9 8 (26)	1 11 (27)	9 12 (10)	1 13 (12)	9 14 (10)
13	11	12	11	1	10	12	13	14	14	11
8	9 1	13 8	9 1	12 8	10 11	9 1	10 9	11 1	13 9	14 1
	18913	181113	18912	181112	181011	191011	191012	191113	191314	191114
1	191327	191127	1101127	1101327	1101527	1101727	1101927	1102127	1102327	1102527
1	13 9	27 11	10 1	27 10	15 1	27 10	19 1	27 10	23 1	27 10
1	27 (10)	9 1 (25)	11 27 (24)	1 13 (12)	10 27 (14)	1 17 (16)	10 27 (18)	1 21 (20)	10 27 (22)	1 25 (24)
12	27	12	27	16	27	20	27	24	27	26
1	27 9	10 1	27 10	14 1	27 10	18 1	27 10	22 1	27 10	26 1
	191227	191027	1101227	1101427	1101627	1101827	1102027	1102227	1102427	1102627
23	1222327	1222527	1222326	1222526	1222425	1232425	1232426	1232527	1242527	1242526
1	22 (23)	21 27 (24)	1 26 (25)	22 25 (24)	1 25 (21)	23 25 (22)	1 26 (25)	23 27 (26)	1 24 (25)	27 1 (22)
27	26	24	23	24	26	26	27	24	26	25
1	24 22	27 1	26 22	25 1	22 23	25 1	26 23	27 1	24 27	1 26
	1222427	1222627	1222426	1222325	1222324	1232526	1232627	1232427	1242627	1252627
26	2252627	2242627	2232427	2232627	2232526	2222324	2222325	2222426	2222627	2222427
26	2 27	24 2	27 23	26 2	25 23	22 2	25 22	26 2	27 22	24 2
26	25 (3)	27 26 (25)	2 24 (26)	23 27 (25)	2 26 (22)	23 24 (21)	2 23 (24)	22 24 (25)	2 26 (24)	21 27 (23)
2	2	24	27	26	25	25	25	26	27	22
26	24 25	27 2	25 23	2 24	23 2	24 22	26 2	23 22	25 2	27 23
	2242526	2242527	2232527	2232426	2232425	2222425	2222526	2222326	2222527	2222327
2	23510	23710	23910	2359	2379	2348	2368	2347	2367	2356
2	10 3	7 2	10 3	9 2	7 3	8 2	6 3	4 2	7 3	2 5
2	5 (4)	3 10 (6)	2 9 (8)	3 5 (4)	2 9 (6)	3 4 (7)	2 8 (5)	3 7 (6)	2 6 (5)	3 6 (1)
10	8	4	9	8	8	8	7	5	4	2
2	6 3	10 2	9 3	6 2	9 3	5 2	8 3	7 2	6 3	5 4
	23610	23810	2349	2369	2389	2358	2378	2357	2346	2345
23	7232425	7242627	7252627	8242527	8242526	8232526	8232627	8232427	8222427	8222627
23	7 (21)	24 26 (23)	25 7 (27)	23 27 (25)	24 25 (21)	23 26 (27)	8 27 (21)	22 23 (26)	8 27 (24)	22 27 (25)
25	7	7	26	8	8	24	25	27	25	26
7	26 24	27 25	8 27	26 24	25 23	26 8	27 23	22 8	27 22	23 8
	7242526	7242527	8252627	8242627	8232425	8232426	8232527	8222327	8222527	8222326
9	892327	892127	891927	891727	891527	891327	891127	9101127	9101327	9101527
8	23 (21)	9 27 (19)	8 19 (17)	9 27 (15)	8 15 (13)	9 27 (8)	10 8 (25)	11 27 (26)	9 13 (12)	10 27 (14)
21	27	20	27	16	27	12	27	12	27	16
8	22 9	27 8	18 9	27 8	14 9	27 8	10 9	27 10	14 9	27 10
	892227	892027	891827	891627	891427	891227	891027	9101227	9101427	9101627
19	17181927	17182127	17182327	17182527	17181926	17182126	17182326	17182526	17182025	17182225
19	27 (26)	17 21 (20)	18 27 (22)	17 25 (24)	18 19 (25)	17 26 (20)	18 23 (22)	17 26 (24)	18 25 (19)	17 22 (21)
20	27	27	27	27	26	22	26	25	21	25
17	27 18	22 17	27 18	26 17	20 18	26 17	24 18	19 17	25 18	23 17
	17182027	17182227	17182427	17182627	17182026	17182226	17182426	17181925	17182125	17182325
22	22232527	22232426	22232425	23242627	23252627					
22	25 23	26 22	25 23	24 26	27 25					
22	27 (23)	25 24 (21)	22 24 (27)	23 27 (26)	24 23 (25)	21				
26	26	26	26	25	27					
22	27 23	22 25	24 23	27 24	26 25					
	22232627	22232526	23242526	23242527	24252627					

图 3 $n = 26$ 时图 $P_m \times P_3$ 的点可区别全染色的部分结果

参考文献:

[1] BEHZAD M. Graphs and Their Chromatic Numbers [D]. East Lansing: Michigan State University, 1965.

- [2] ZHANG Zhong-fu, QIU Peng-xiang, XU Bao-gen, et al. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. *Ars Combinatoria*, 2008, 87: 33-45.
- [3] 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩, 等. 图的距离不大于 β 的点可区别的全染色 [J]. *中国科学: 数学*, 2006, 36(10): 119-130.
- [4] WANG Zhi-wen, YAN Li-hong, ZHANG Zhong-fu. Vertex Distinguishing Equitable Total Chromatic Number of Join Graph [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series*, 2007, 23(3): 445-450.
- [5] BAO Shi-tang, WANG Zhi-wen, WEN Fei. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Ladder Graphs [C]. *ISIA2010*: 118-124.
- [6] 包世堂, 杨茂军. 梯图 $L_m (2 < m \leq 37)$ 的点可区别全染色 [J]. *西北师范大学学报: 自然科学版*, 2010, 46(5): 16-18.
- [7] 包世堂, 王治文, 钟约夫, 等. 梯图的点可区别全染色 ($n \equiv 2 \pmod{8}$) [J]. *福州大学学报: 自然科学版*, 2010, 38(6): 782-788.
- [8] BAO Shi-tang, WANG Zhi-wen. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Ladder Graphs ($n \equiv 3 \pmod{8}$) [C]. *ICC-NT2011*: 193-196.
- [9] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory* [M]. New York: Springer, 2008.

Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graph $P_m \times P_3 (n = 11 + 8k)$ and the Algorithm

BAO Shi-tang¹, HAN Xiao-hong¹, LI Mu-chun², WEN Fei²

(1. School of Information Science and Engineering, Lanzhou City University, Lanzhou 730070, China;

2. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let A be a set consisted of all combinations which are made up of four numbers selected from the set $\{1, 2, \dots, n\}$ discretionarily. By the triangle compositor, the author obtain that for any two adjacent elements C and D in set A , they contain the same three elements. In this paper, using the above idea and $\binom{n+8k}{3} - \binom{n}{3} \equiv 0 \pmod{4}$, it is proved that when $n = 11 + 8k (k = 0, 1, \dots)$ and $\binom{n-1}{4}/2 + 2 < m \leq \binom{n}{4}/2 + 2$, vertex distinguishing total chromatic number of product $P_m \times P_3$ is n .

Key words: product graph; vertex distinguishing total coloring; vertex distinguishing total chromatic number; triangle sequence

(责任编辑 向阳洁)