文章编号:1007-2985(2011)06-0005-06

图 $P_m \times P_3$($n=11+8k$)的点可区别全染色与算法*

包世堂[1],韩晓红[1],李沐春[2],文 飞[2]

(1. 兰州城市学院信息工程学院,甘肃 兰州 730070;2. 兰州交通大学应用数学研究所,甘肃 兰州 730070)

摘 要:集合$\{1,2,\cdots,n\}$中取 4 个数字的所有组合,经三角排序后任意相邻 2 个组合都有 3 个相同数字. 利用此结果和组合性质$\binom{n+8k}{3}-\binom{n}{3}\equiv 0 \pmod 4$构造算法,并证明当$n=11+8k(k=0,1,\cdots)$和$\binom{n-1}{4}/2+2<m\leqslant\binom{n}{4}/2+2$时积图$P_m\times P_3$的点可区别全色数为$n$.

关键词:积图;点可区别全染色;点可区别全色数;三角排序

中图分类号:O157.5　　文献标志码:A

图的全染色[1]被称为点可区别的,即对任意 2 个不同点的相关联元素所染颜色构成的色集合不同. 其中所用的最少颜色数称为点可区别的全色数[2-4]. 文献[5-8]对梯图的点可区别全染色进行了研究. 笔者现利用三角排序的结果和组合性质$\binom{n+8k}{3}-\binom{n}{3}\equiv 0 \pmod 4$构造算法,研究$P_m\times P_3$的点可区别全染色.

1 预备知识

定义 1 对$\{1,2,\cdots,n\}$中取 4 个数字的所有组合进行如下排序:

$123n$　$124n$　$125n$　$\cdots$　$12(n-2)n$　$12(n-1)n$

$123(n-1)$　$124(n-1)$　$125(n-1)$　$\cdots$　$12(n-2)(n-1)$

$\cdots$

1234

1345　1346

1356

$\cdots$

$13(n-1)n$　$13(n-2)n$　$13(n-3)n$　$\cdots$　$134n$

$145n$　$146n$　$147n$　$\cdots$　$14(n-2)n$　$14(n-1)n$

$145(n-1)$　$146(n-1)$　$147(n-1)$　$\cdots$　$14(n-2)(n-1)$

$\cdots$

* 收稿日期:2011-06-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11061017);甘肃省教育厅科研项目(1111B-04)
作者简介:包世堂(1970-),男,甘肃定西人,兰州城市学院信息工程学院副教授,主要从事信息与计算科学研究.

1456

1567

…

$1(n-3)(n-1)n \quad (n-3)(n-2)n$

$1(n-2)(n-1)n$

$2(n-2)(n-1)n$

$2(n-3)(n-1)n \quad 2(n-3)(n-2)n$

…

2345

3456

3467　3457

…

$(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$

$(n-3)(n-2)(n-1)n$

此序列称为所有组合的三角排序.该序列有如下特点:

(1) 三角序列包含了$\{1,2,\cdots,n\}$中取4个数字的所有组合;

(2) 任意相邻2个组合都有3个相同数字.

这些排序规律和特点适用于图$P_m\times P_3$的点可区别全染色.

定义2　对于2个简单图G和H,卡氏积图$G\times H$满足:

(1) $V(G\times H)=V(G)\times V(H)$;

(2) $E(G\times H)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)\mid u_1=u_2$ 且 $v_1v_2\in E(H)$,或 $v_1=v_2$ 且 $u_1u_2\in E(G)\}$.

文中未说明的符号或术语见文献[9].

2　基本算法

集合$\{1,2,\cdots,n\}$中取4个数字的所有三角序列中,每个组合包含4个数,且由小到大排列.用s_k表示一个组合,并称之为染色元,s_{kj}表示s_k中的第j个数($j=1,2,3,4$),于是$s_{k1}<s_{k2}<s_{k3}<s_{k4}$.对以上染色序列依$s_{k1}$编队.按照$s_{k1}$的可能取值$1,2,\cdots,n-3$将$s_k$分为15个队,具体地,当$s_{k1}\equiv l \pmod 8$时,将$s_k$编为$l$队,其中$l=1,2,\cdots,7$.当$l=0$时,将$s_k$编为第8队;而将$s_{k1}$的7个可能取值$n-9,n-8,\cdots,n-3$对应的$s_k$依次编为9队、10队、…、15队.类似地,对同一队的染色序列按s_{k2}的值分组,当$s_{k2}<n-8$时,依次循环编组号为1组、2组、…、8组.当$s_{k2}\geqslant n-8$时依次编组号为9组、10组、…、15组.将染色序列中的所有染色元从前向后两两配对,每对中的第1个染色元染图$P_m\times P_3$中的u_i,第2个染色元染w_i.各组中的倒数第4个染色元所在的1对及其后面3对组成该组的结点区,其他的连续染色序列称为正常区.若某一结点区后无正常区,则将这一组所有染色元归为这一结点区.显然,对同一正常区中的s_k和s_j,有

$$s_{k1}=s_{j1},s_{k2}=s_{j2} \qquad k\neq j,$$
$$\{s_{k3},s_{k4}\}\cap\{s_{k+1,3},s_{k+1,4}\}=C_k \qquad C_k\neq\varnothing \text{ 且 } |C_k|=1.$$

记$Q_k=\{s_{k3},s_{k4}\}-C_k$,则$Q_k\neq Q_{k+1}$.

使用正常区中的染色元s_k对点u_i和w_i及其关联的边着色时,将s_{k1}与s_{k2}分配给$u_{i-1}u_i$与$w_{i-1}w_i$及u_iu_{i+1}与w_iw_{i+1}.Q_k和Q_{k+1}分配给点u_i和w_i;u_iv_i和v_iw_i先分配相同色C_k,对v_i作全染色时再作调整;结点区中的染色元很少,只需给出一种VDTC即可.通常对图$P_m\times P_3$着色时,u_2用第1个染色元着色,w_2用第2个染色元着色,依次类推.

由于点$v_i(i=2,3,\cdots,m-1)$是四度点,因此对它着色时,需分配5种色.当$n=11+8k(k=0,1,\cdots)$时$\binom{n}{5}>\binom{n}{4}/2$,所以当$\binom{n-1}{4}/2+2<m\leqslant\binom{n}{4}/2+2$时,只需选出部分五元组合作点$v_i$的全染色,对正

常区中的 v_i 染色方案 f 如下：

$$f(v_{i-1}v_i)=f(u_{i-1}u_i);$$
$$f(v_iv_{i+1})=f(u_iu_{i+1});$$

$$f(v_j)=\begin{cases}C_k-1 & s_{k4}\neq s_{k+1,4},\\ s_{i4}-1 & s_{k4}=s_{k+1,4},\min(s_{k3},s_{k+1,3})-1\leqslant s_{k2}\leqslant s_{k4}/2,\\ n & s_{k4}=s_{k+1,4},\min(s_{k3},s_{k+1,3})-1\leqslant s_{k2},s_{k2}\geqslant s_{k4}/2,\\ \min(s_{k3},s_{k+1,3})-1 & s_{k4}=s_{k+1,4},\min(s_{k3},s_{k+1,3})-1\geqslant s_{k2}.\end{cases}$$

u_iv_i 和 v_iw_i 染色时，交换点 u_i 和边 u_iv_i 分配的颜色，边 v_iw_i 的颜色保持不变，或者交换点 w_i 和边 v_iw_i 分配的颜色，边 u_iv_i 的颜色保持不变.

已知两染色元 $s_k,s_{k'}$ 满足：(1) s_{k1} 为奇数；(2) $s_{k'1}=s_{k1}+1$，$s_{k'2}=s_{k2}$，$s_{k'3}=s_{k3}$，$s_{k'4}=s_{k4}$，$s_{k'5}=s_{k5}$. 用染色元 $s_k,s_{k'}$ 分别对点 v_i,v_j 着色时，若着色方案 f 满足以下条件，则称 f 为对称着色（见图 1，括号中的数字为分配给点 v_i 的颜色）：

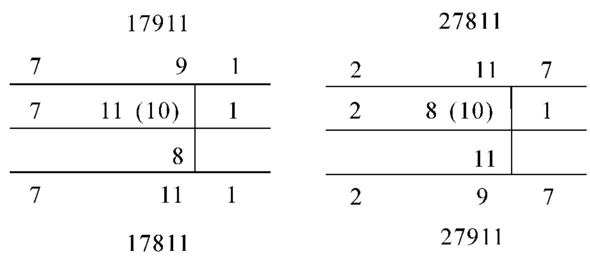

图 1　对称着色

(1) $f(v_{j-1}v_j)=\begin{cases}f(v_iv_{i+1}) & f(v_iv_{i+1})\neq s_{k1},\\ s_{k'1} & f(v_iv_{i+1})=s_{k1};\end{cases}$

(2) $f(v_j)=\begin{cases}f(v_i) & f(v_i)\neq s_{k1},\\ s_{k'1} & f(v_i)=s_{k1};\end{cases}$

(3) $f(v_jv_{j+1})=\begin{cases}f(v_{i-1}v_i) & f(v_{i-1}v_i)\neq s_{k1},\\ s_{k'1} & f(v_{i-1}v_i)=s_{k1};\end{cases}$

(4) $f(u_jv_j)=\begin{cases}f(v_iw_i) & f(v_iw_i)\neq s_{k1},\\ s_{k'1} & f(v_iw_i)=s_{k1};\end{cases}$

(5) $f(v_jw_j)=\begin{cases}f(u_iv_i) & f(u_iv_i)\neq s_{k1},\\ s_{k'1} & f(u_iv_i)=s_{k1}.\end{cases}$

根据三角序的排列特点，2 队、4 队、6 队、8 队等偶数队可分别与 1 队、3 队、5 队、7 队等奇数队作对称着色.

3　主要结果

由于图 $P_m\times P_3$ 的三度点个数为 $2(m-2)$，四度点个数为 $m-2$，因此可得：

引理 1　$\chi_{vt}(P_m\times P_3)\geqslant\min\{n\mid\binom{n}{4}\geqslant 2(m-2)$，且$\binom{n}{5}\geqslant m-2\}$.

定理 1　对图 $P_m\times P_3(107<m\leqslant 167)$，有 $\chi_{vt}(P_m\times P_3)=11$.

证明　根据引理 1 知，当 $107<m\leqslant 167$ 时，$\chi_{vt}(P_m\times P_3)\geqslant 11$，仅需给出图 $P_m\times P_3$ 的 11－点可区别全染色. 根据三角排序及以上算法，可得如图 2 所示的着色结果.

从而，定理 1 成立.

定理 2　对任意的正整数 $n=11+8k(k=1,2,3,\cdots)$ 且 $\binom{n-1}{4}/2+2<m\leqslant\binom{n}{4}/2+2$，则 $\chi_{vt}(P_m\times P_3)=n$.

根据三角排序、着色方法及组合了结论 $\binom{n+8k}{3}-\binom{n}{3}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，编写 C 语言程序（VC ++ 在 PC 机上实现）得到着色结果. 图 3 给出了 $n=26$ 时图 $P_m\times P_3$ 的点可区别全染色的部分结果.

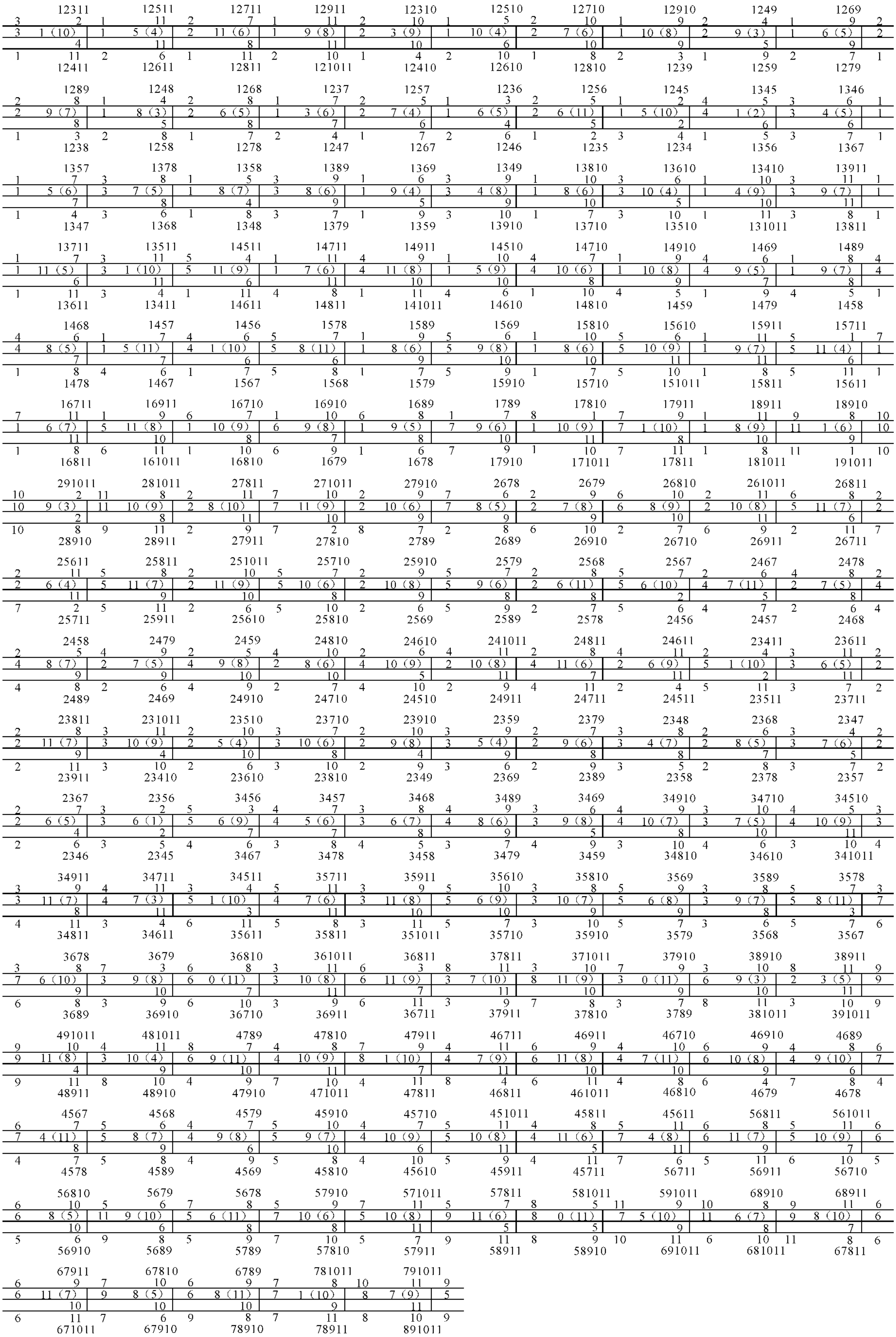

图 2　图 $P_m \times P_3$ 的 11－点可区别全染色着色结果

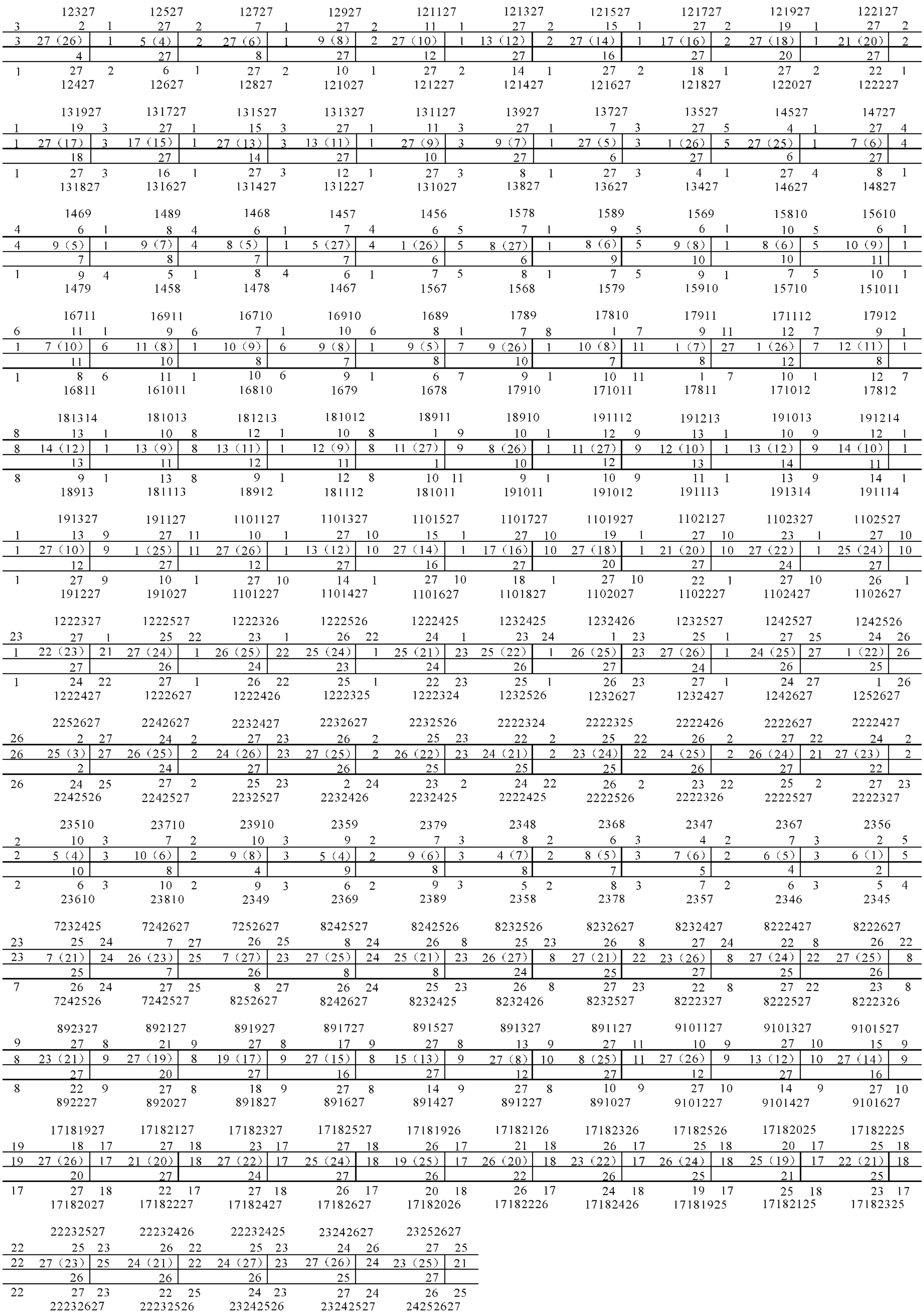

图 3　$n=26$ 时图 $P_m \times P_3$ 的点可区别全染色的部分结果

参考文献：

[1]　BEHZAD M. Graphs and Their Chromatic Numbers [D]. East Lasing：Michigan State University，1965.

[2] ZHANG Zhong-fu,QIU Peng-xiang,XU Bao-gen,et al. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. Ars Combinatoria,2008,87:33-45.

[3] 张忠辅,李敬文,陈祥恩,等. 图的距离不大于 β 的点可区别的全染色 [J]. 中国科学:数学,2006,36(10):1 119-1 130.

[4] WANG Zhi-wen,YAN Li-hong,ZhANG Zhong-fu. Vertex Distinguishing Equitable Total Chromatic Number of Join Graph [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica:English Series,2007,23(3):445-450.

[5] BAO Shi-tang,WANG Zhi-wen,WEN Fei. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Ladder Graphs [C]. ISIA2010:118-124.

[6] 包世堂,杨茂军. 梯图 $L_m(2<m\leqslant 37)$的点可区别全染色 [J]. 西北师范大学学报:自然科学版,2010,46(5):16-18.

[7] 包世堂,王治文,钟约夫,等. 梯图的点可区别全染色($n\equiv 2 \pmod 8$) [J]. 福州大学学报:自然科学版,2010,38(6):782-788.

[8] BAO Shi-tang,WANG Zhi-wen. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Ladder Graphs ($n\equiv 3 \pmod 8$) [C]. ICCNT2011:193-196.

[9] BONDY J A,MURTY U S R. Graph Theory [M]. New York:Springer,2008.

Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graph $P_m \times P_3$ ($n=11+8k$) and the Algorithm

BAO Shi-tang[1], HAN Xiao-hong[1], LI Mu-chun[2], WEN Fei[2]

(1. School of Information Science and Engineering,Lanzhou City University,Lanzhou 730070,China;
2. Institute of Applied Mathematics,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China)

Abstract: Let A be a set consisted of all combinations which are made up of four numbers selected from the set $\{1,2,\cdots,n\}$ discretionarily. By the triangle compositor, the author obtain that for any two adjacent elements C and D in set A, they contain the same three elements. In this paper, using the above idea and $\binom{n+8k}{3}-\binom{n}{3}\equiv 0 \pmod 4$, it is proved that when $n=11+8k(k=0,1,\cdots)$ and $\binom{n-1}{4}/2+2<m\leqslant\binom{n}{4}/2+2$, vertex distinguishing total chromatic number of product $P_m\times P_3$ is n.

Key words: product graph; vertex distinguishing toal coloring; vertex distinguishing total chromatic number; triangle sequence

(责任编辑 向阳洁)