

文章编号:1007-2985(2011)05-0009-02

Smarandache 复合函数的渐近公式*

黄 炜

(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要:研究了 Smarandache 复合函数的均值性质,并用解析方法得到了其均值的 2 个渐近公式.

关键词:Smarandache 复合函数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4

文献标志码:A

1 问题的提出

对于任意的正整数 n ,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m ,即 $S(n) = \min\{m; n | m!, m \in \mathbb{N}\}$,该数列的前几项为 1,2,3,4,5,3,7,4,6,5,11,4,13,7,5,6,17,6,19,6,7,.... 从 $S(n)$ 的定义和性质很容易推断,对于任意正整数 n ,若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$,则有 $S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S(p_i^{a_i})\}$. 关于函数 $S(n)$ 的性质,不少学者进行了研究,文献[1]中研究了 $S(n)$ 的值分布性质,文献[2-7]中也进行了研究,获得较好的结果.

文献[7]研究了 Smarandache 函数的值分布性质,获得下面更深刻的结果:设 $P(n)$ 表示 n 最大素因数,对于任意整数 $x > 1$,有渐进公式:

$$\sum_{n \leq x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}).$$

笔者研究了函数 $S^k(n)$ 和 $\frac{S^k(n)}{n}$ 的均值,并得到几个有趣的渐近公式,即证明了下面的结论:

定理 1 设是 $k \geq 1$ 给定正整数,对于任意实数 $x > 1$,有近似公式

$$\sum_{n \leq x} S^k(n) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln x} + O(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}).$$

定理 2 设是 $k \geq 1$ 给定正整数,对于任意实数 $x > 1$,有近似公式

$$\sum_{n \leq x} \frac{S^k(n)}{n} = \frac{2\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^k}{\ln x} + O(\frac{x^k}{\ln^2 x}).$$

2 几个引理

引理 1 对于任意正整数 n ,如果它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$,设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,那么:

(i) 若 $P > \sqrt{n}$,则 $S(n) = P(n)$;

* 收稿日期:2011-05-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(SJ08A28)

作者简介:黄 炜(1961-),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,硕士,主要从事数论及特殊函数研究.

(ii) 若 $n = kp_1 p_2, p_2 > p_1 > \sqrt[3]{n} > k$ 的 p_1, p_2, k 两两互素, 则 $S(n) = P(n)$;

(iii) 若 $n = kp^2$ 且 $p > \sqrt[3]{n} > k$, 则 $S(n) = 2P(n)$.

证明见文献[7].

引理 2 对于任意正整数 n , 若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, 则有 $S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S(p_i^{a_i})\}$.

证明见文献[7].

引理 3 对于任何实数 $x > 1$, 有渐近公式

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{i=1}^k \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数 p 的个数, $a_i = (i-1)!, i=1, 2, 3, \dots, k$.

证明可参阅文献[8].

3 定理的证明

3.1 定理 1 的证明

现将区间 $[1, x]$ 中的所有正整数分成 2 个集合 A, B , 其中 A 是满足那些存在素数 p , 使得 $p \mid m$, 且 $p > \sqrt{n}$ 的整数 n 的集合, 而 B 是包含区间 $[1, n]$ 中不属于集合 A 的那些正整数 n 的集合. 由 A, B 的定义有

$$\sum_{n \leq x} S^k(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} S^k(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} S^k(n).$$

现利用引理 1, 下面逐一计算:

(i) 对于任意的 $n \geq 1$ 且 $n \in A$, 因 $P > \sqrt{n}$, 故 n 的标准分解式中最大素数 P 的次数为 1, 不妨设 $n = mp$ 且 m 的所有素因子 q 满足 $q < \sqrt[3]{n}$, 由于 $p < \sqrt{n}$ 时 $S(n) \leq n^{\frac{1}{2}} \ln n$, 因此有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} S^k(n) &= \sum_{\substack{mp \leq x \\ p > \sqrt{n}}} S(p^k) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{m \leq p \leq \frac{x}{m}} p^k = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{\left(\frac{x}{m}\right)^{k+1}}{(k+1) \ln \frac{x}{m}} + O\left(\sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{m \leq p \leq \frac{x}{m}} p^k\right) = \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1) \ln x} \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{1}{m^{k+1}} + O\left(\frac{x^{k+1}}{m^{k+1}} \frac{1}{\ln^2 x}\right) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} \frac{x^{k+1}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

(ii) 若 $n \in B$, 此时有 $n = mp^2$, 由于 $p > \sqrt{n}$ 时 $S(n) \leq n^{\frac{1}{2}} \ln n$, 因此有

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} S^k(n) \ll \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} n^{\frac{k}{2}} \ln^k n = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} \leq p \leq \frac{x}{m}} (mp)^{\frac{k}{2}} \ln^k(mp) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} m^{\frac{k}{2}} \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{k}{2}} \ln^k x \frac{x}{\ln x} \ll x^{\frac{k+2}{2}} \ln^k x.$$

由 (i) 和 (ii) 立即得到

$$\sum_{n \leq x} S^k(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} S^k(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} S^k(n) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right).$$

这就完成了定理 1 的证明.

3.2 定理 2 的证明

应用 Abel's 求和公式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{S^k(n)}{n} &= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} S^k(n) + \int_1^x \frac{1}{y^2} \left(\sum_{n \leq y} S^k(n)\right) dy = \frac{1}{x} \left(\frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right)\right) + \\ &= \int_1^x \frac{1}{y^2} \left(\frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{y^{k+1}}{\ln y} + O\left(\frac{y^{k+1}}{\ln^2 y}\right)\right) dy = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^k}{\ln x} + \\ &= O\left(\frac{x^k}{\ln^2 x}\right) + \int_1^x \frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{y^{k-1}}{\ln y} dy + O\left(\int_1^x \frac{y^{k-1}}{\ln^2 y} dy\right) = \\ &= \frac{2\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^k}{\ln x} + O\left(\frac{x^k}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

(下转第 15 页)

定理 2 中的(i)至(v)-型群.

这样就证明了定理 3 成立.

参考文献:

- [1] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classes of Maximal Subgroups [J]. Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. Enat., 1979, 66: 175-178.
- [2] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classes of Maximal Subgroups II [J]. Ibib., 1980, 68: 179.
- [3] 施武杰. 极大子群同阶类类数不大于 2 的有限群 [J]. 数学年刊: A 辑, 1985(5): 532-537.
- [4] 李世荣. 非正规极大子群同阶类类数等于 2 的有限群 [J]. 数学学报, 1990(3): 388-392.
- [5] 黎先华. 极大子群同阶类类数=3 的有限群 [J]. 数学学报, 1994(1): 108-115.
- [6] 王立中. 极大子群个数 <5 的有限群 [J]. 首都师范大学学报, 2000, 21(3): 10-13.
- [7] 游兴中, 王香芬, 陈为敏. 恰有 5 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2010, 31(5): 8-10.
- [8] 游兴中, 朱伟华, 刘 峥. 恰有 6 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2011, 32(3): 1-3.
- [9] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [10] HUPPERT B. Endlich Gruppen I [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.

Finite Groups with Just 7 Maximal Subgroups

YOU Xing-zhong, LIU Zheng, ZHU Wei-hua

(College of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410004, China)

Abstract: It is investigated how the number of maximal subgroups of a finite group influences its structure and determine the structure of a finite group with just seven maximal subgroups in this paper.

Key words: finite group; maximal subgroup; conjugacy

(责任编辑 向阳洁)

(上接第 10 页)参考文献:

- [1] SMARANDACHE F. Only Proplem, Not Solution [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- [2] WANG Yong-xing. On the Smarandache Function [J]. Reserchon Smarandache Problem in Number Theory, 2005, 2: 103-106.
- [3] LU Ya-ming. On the Solution of an Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.
- [4] SANDOR J. On a Dual of the Pseudo-Smarandache Function [J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 16-23.
- [5] 黄 炜. K 次方根序列的均值渐近公式 [J]. 甘肃科学学报, 2009, 21(3): 10-11.
- [6] 黄 炜. 素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 及其均值 [J]. 河南科学, 2009, 27(9): 1 031-1 033.
- [7] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报: 中文版, 2006, 49(5): 1 009-1 012.
- [8] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

Smarandache Involving Function and Its Asymptotic Formula

HUANG Wei

(Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, Shaanxi China)

Abstract: The hybrid mean value of divisor products function was studied and two asymptotic formula of this function was given by using the analytic methods.

Key words: Smarandache involving function; mean value; asymptotic formula

(责任编辑 向阳洁)