第 32 卷 第 3 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 3
2011 年 5 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) May 2011

文章编号:1007-2985(2011)03-0022-04

基于 Wild Bootstrap 非参数方法的 AR 模型线性检验*

王敬勇

(铜陵学院经济贸易系,安徽 铜陵 244061)

摘 要:介绍了 AR 模型线性的非参数核检验统计量,并对检验统计量进行了检验水平和检验势的 Wild Bootstrap 模拟. 模拟结果显示,非参数核检验统计量的 Wild Bootstrap 检验稳健性和可靠性都比渐近检验高,TAR 与双线性 AR 模型比其他 3 种 AR 的检验势高.

关键词:Wild Bootstrap;AR 模型;检验水平;检验势;非线性

中图分类号:O212 文献标志码:A

许多重要的宏观经济序列具有非线性行为,使用线性的平稳时间序列自回归模型(AR)来拟合时间序列,拟合优度和预测效果都将逊色于非线性自回归模型. 其中文献[1]使用 SETAR 模型对中国通货膨胀率进行拟合,明显优于线性 AR 模型,但它并没有对通货膨胀率数据进行线性检验. 此外,文献[2-8]用不同检验方法(如非参数、神经网络、小波等)、不同非线性模型(如 TAR,SETAR,MSAR 等)对自回归模型进行了线性检验. 笔者根据文献[2]的条件矩非参数方法,其零假设对于条件均值线性模型可以正确地拟合,但这次使用 Wild Bootstrap 重复抽样方法进行渐近检验,因为 Wild Bootstrap 可以用于弱相关和非相关数据的检验,且模拟结果显示检验效果优于渐近方法.

1 非参数核检验

令回归模型为 $y_t = m(\boldsymbol{x}_t) + \varepsilon_t$,其中:$\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, \cdots, x_{tk})$,$\boldsymbol{x}_t$ 可以包括常数项和 y_t 的滞后项;$m(\boldsymbol{x}_t) = E(y_t \mid \boldsymbol{x}_t)$ 是未知的函数形式;ε_t 是误差项,且 $E(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{x}_t) = 0$. 假设回归模型是参数形式,如令 $m(\boldsymbol{x}_t, \beta) = \boldsymbol{x}_t\beta$. 在零假设 H_0 下,y_t 是线性的,即

$$H_0: m(\boldsymbol{x}_t) = \boldsymbol{x}_t\beta. \tag{1}$$

备择假设 H_1 是否定 H_0 的线性形式,有

$$H_1: m(\boldsymbol{x}_t) \neq \boldsymbol{x}_t\beta. \tag{2}$$

当备择假设是真的,则线性模型忽略了非线性行为. 若 H_0 为真,例如参数回归模型 $m(\boldsymbol{x}_t, \beta) = \boldsymbol{x}_t\beta$,则可以使用最小二乘估计方法得到 $\hat{\beta}$;若 H_0 是伪的,在未知 $m(\boldsymbol{x}_t)$ 形式下,则可以选择非参数回归估计检验备选模型. 即

$$\min \sum \varepsilon_t^2 K\left(\frac{\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}}{b}\right). \tag{3}$$

其中:$\varepsilon_t = y_t - m(\boldsymbol{x}_t, \beta)$;$K(\cdot)$ 为核函数;$b > 0$ 是窗宽. 例如参数回归模型为 $m(\boldsymbol{x}_t, \beta) = \boldsymbol{x}_t\beta(\boldsymbol{x})$,则参数 $\beta(\boldsymbol{x})$ 为

$$\hat{\beta}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} K(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x})^{-1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} K(\boldsymbol{x}) y. \tag{4}$$

在零假设 H_0 下有 $m(\boldsymbol{x}_t) = \boldsymbol{x}_t\beta$,$E(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{x}_t) = 0$,根据迭代期望法则,有

$$E[\varepsilon_t E(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{x}_t)] = E[E(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{x}_t)^2] = 0.$$

若 H_0 为真,文献[2]使用非参数估计方法依据密度加权条件矩 $E[\varepsilon_t E(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{x}_t) f(\boldsymbol{x}_t)]$,其中 $f(\boldsymbol{x}_t)$ 是 $\boldsymbol{x}_t$ 的密度函数. 这样可以构造检验统计量:

* 收稿日期:2010-12-26
作者简介:王敬勇(1978-),男,安徽淮北人,铜陵学院经济贸易系讲师,博士,主要从事计量经济学研究.

$$L' = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t E(\hat{\varepsilon}_t \mid \boldsymbol{x}_t)\hat{f}(\boldsymbol{x}_t) = \frac{1}{n(n-1)b^k}\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=1,t'\neq t}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t'}K_{t't}. \tag{5}$$

其中：$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \boldsymbol{x}_t\hat{\beta}$；$E(\hat{\varepsilon}_t \mid \boldsymbol{x}_t) = \dfrac{\sum_{t'\neq t}\hat{\varepsilon}_{t'}K_{t't}}{\sum_{t'\neq t}K_{t't}}$；$\hat{f}(\boldsymbol{x}_t) = \dfrac{1}{(n-1)b^k}\sum_{t'\neq t}K_{t't}$ 是核密度估计；$K_{t't} = K(\dfrac{\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t}{b})$. 其渐近检验统计量为

$$L = nb^{k/2}L'/\hat{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{6}$$

其中 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{2}{n(n-1)b^k}\sum_t\sum_{t'\neq t}\hat{\varepsilon}_t^2\hat{\varepsilon}_{t'}^2K_{t't}^2$，即为 $nb^{k/2}L'$ 渐近方差的一致估计量，k 是解释变量数.

2　检验统计量检验水平与检验势的 Bootstrap 模拟

使用以下 8 种数据生成过程，其中一些模型已经在相关文献[9-10]中存在. DGP1 到 DGP3 都是线性 AR 模型，而 DGP4 到 DGP8 是非线性模型用来检验势的 Bootstrap 模拟. 使用标准正态核，窗宽 $b = \hat{c\sigma} n^{-1/5}$，设定 $c(=0.1, 0.5, 1, 2)$ 来选择不同的窗宽.

DGP1 线性 AR(1) $y_t = 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t$.

DGP2 线性 AR(2) $y_t = 0.4y_{t-1} - 0.3y_{t-2} + \varepsilon_t$.

DGP3 线性 AR-GARCH $y_t = 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t, h_t = 0.01 + 0.3\varepsilon_t^2 + 0.68h_{t-1}$.

DGP4 门限自回归 $y_t = 0.9y_{t-1}\mathbf{1}(|y_{t-1}| \leqslant 1) - 0.3y_{t-1}\mathbf{1}(|y_{t-1}| > 1) + \varepsilon_t$.

DGP5 LSTAR $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.3y_{t-1}(1 + \exp\{-3(y_{t-1} - 1)\})^{-1} + \varepsilon_t$.

DGP6 ESTAR $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.3y_{t-1}(\exp\{-3(y_{t-1} - 1)^2\}) + \varepsilon_t$.

DGP7 MSAR $y_t = 0.9y_{t-1} + \varepsilon_{1t}, s_t = 1; y_t = -0.3y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, s_t = 2$.

DGP8 双线性 AR 模型 $y_t = 0.4y_{t-1} - 0.3y_{t-2} + 0.5y_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$.

现使用 Wild Bootstrap 方法(用符号"Wild"表示)和渐近方法(用符号"Asy"表示). Wild Bootstrap 是一种使用两点分布对误差项修正的 Bootstrap 估计方法. 下面是 Wild Bootstrap 方法得到统计量 P 值的模拟过程：

(ⅰ) 使用原始样本数据$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}, y_1, \cdots, y_n)$得到 OLS 回归系数$\hat{\beta}$的估计，并计算残差 $\hat{u}_t = y_i - \boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}\hat{\beta}$.

(ⅱ) 使用两点分布抽取 Bootstrap 误差 u_i^*. 概率是 $r = (\sqrt{5}+1)/2\sqrt{5}$ 时，$u_i^* = a\hat{u}_i$；概率是 $1-r$ 时，$u_i^* = b\hat{u}_i$. 其中 $a = -(\sqrt{5}-1)/2, b = (\sqrt{5}+1)/2$.

(ⅲ) 根据 Bootstrap 误差 u_i^*，生成 $y_i^* = x_i^{\mathrm{T}}\hat{\beta} + u_i^*$，再使用 Bootstrap 样本$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*)$进行统计推断，得到 Wild Bootstrap 检验统计量，假设为 τ_n^*.

(ⅳ) 重复上述步骤 B 次，如使用 500 次，则统计量的 P 值为 $\hat{p}^*(\hat{\tau}) = \dfrac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}I(\tau_j^* > \hat{\tau})$.

3　模拟结果

从表 1 和表 2 可以看出，即使在小样本下，Wild Bootstrap 检验水平接近于名义检验水平. 此外，随着窗宽参数 c 的增加，渐进统计量的检验水平有较大幅度的下降而 Wild Bootstrap 检验并没有下降却较稳健，且在较大样本下 $n=200$ 时，渐进统计量的检验水平也没有 Wild Bootstrap 检验接近于名义检验水平，表明 Wild Bootstrap 检验的稳健性比渐近检验的好.

对于 TAR 模型，Wild Bootstrap 方法比渐近方法的检验势要高，且两者都对于 c 的选择较敏感，如 c 从 0.1～1 时检验势是增加的，而到 2 时又降低. 随着样本量的增加，Wild Bootstrap 方法和渐近方法的检验势也依次增加. 对于 ESTAR 和 LSTAR 模型，多次选择系数，平滑函数中门限值以及组合，且又扩展了滞后到二阶，在进行大量的模拟后显示，非参数核检验势变化不大，且较低，特别是样本量较小时. 因为在一般情况下，STAR 和 ESTAR 模型只有在高阶滞后才是良好逼近的，所以很可能三阶以后的高阶项才是

显著的,这就会导致对于本身具有非线性特征的数据,由于滞后阶偏少,而前几阶联合不显著,而错误地认为这些数据是线性特征的.若使用 MSAR 模型进行检验势的模拟,则显然与 TAR 模型类似.双线性 AR 也与 TAR 模型类似,但对于 c 来说,检验势一直增加.

但就检验势的几种模型来说,TAR 与双线性 AR 模型比其他 3 种 AR 的检验势高(见表 3).

表 1 5%显著性水平下的非参数核检验水平

DGP	n	$Asy_{0.1}$	$Wild_{0.1}$	$Asy_{0.5}$	$Wild_{0.5}$	Asy_1	$Wild_1$	Asy_2	$Wild_2$
AR(1)	25	0.026	0.035	0.011	0.033	0.002	0.035	0.000	0.028
	50	0.037	0.047	0.014	0.040	0.002	0.046	0.000	0.045
	100	0.033	0.046	0.017	0.050	0.004	0.044	0.000	0.037
	200	0.038	0.048	0.027	0.052	0.008	0.051	0.000	0.047
AR(2)	25	0.003	0.033	0.017	0.036	0.002	0.035	0.000	0.043
	50	0.021	0.037	0.019	0.044	0.007	0.040	0.000	0.052
	100	0.046	0.048	0.038	0.058	0.011	0.043	0.001	0.051
	200	0.057	0.060	0.034	0.064	0.018	0.052	0.000	0.051
AR(1)-GARCH	25	0.033	0.034	0.009	0.033	0.002	0.030	0.000	0.030
	50	0.046	0.048	0.031	0.047	0.010	0.045	0.000	0.045
	100	0.046	0.053	0.034	0.047	0.024	0.054	0.002	0.056
	200	0.061	0.058	0.046	0.050	0.043	0.051	0.019	0.055

注 使用 5%显著性水平时,95%的渐进置信区间为(0.36,0.64),在 10%显著性水平时为(0.081,0.119);Asy 为 asymptotic 的缩写,表示渐进统计量的意思;$Asy_{0.1}$ 的下标表示窗宽中 c 值的选择

表 2 10%显著性水平下的非参数核检验水平

DGP	n	$Asy_{0.1}$	$Wild_{0.1}$	$Asy_{0.5}$	$Wild_{0.5}$	Asy_1	$Wild_1$	Asy_2	$Wild_2$
AR(1)	25	0.067	0.087	0.020	0.076	0.007	0.072	0.000	0.082
	50	0.089	0.110	0.033	0.097	0.004	0.100	0.000	0.095
	100	0.060	0.089	0.029	0.088	0.011	0.095	0.000	0.098
	200	0.065	0.095	0.050	0.099	0.020	0.101	0.003	0.091
AR(2)	25	0.058	0.073	0.038	0.083	0.009	0.087	0.000	0.093
	50	0.102	0.089	0.047	0.090	0.014	0.095	0.000	0.102
	100	0.100	0.094	0.062	0.111	0.020	0.103	0.003	0.110
	200	0.103	0.112	0.073	0.114	0.027	0.104	0.002	0.105
AR(1)-GARCH	25	0.080	0.077	0.027	0.083	0.007	0.079	0.000	0.101
	50	0.080	0.087	0.048	0.095	0.017	0.104	0.000	0.094
	100	0.078	0.094	0.051	0.092	0.039	0.103	0.005	0.098
	200	0.101	0.106	0.076	0.106	0.060	0.099	0.029	0.109

注 同表 1

表 3 5%显著性水平下的非参数核检验势

DGP	n	$Asy_{0.1}$	$Wild_{0.1}$	$Asy_{0.5}$	$Wild_{0.5}$	Asy_1	$Wild_1$	Asy_2	$Wild_2$
TAR(1)	25	0.152	0.149	0.178	0.297	0.035	0.257	0.000	0.138
	50	0.320	0.355	0.435	0.588	0.246	0.615	0.002	0.450
	100	0.653	0.690	0.873	0.923	0.786	0.938	0.086	0.842
	200	0.755	0.821	0.910	0.962	0.811	0.971	0.112	0.855
ESTAR(1)	25	0.027	0.033	0.011	0.030	0.000	0.042	0.000	0.034
	50	0.029	0.031	0.019	0.046	0.006	0.062	0.001	0.052
	100	0.041	0.062	0.032	0.062	0.018	0.078	0.001	0.072
	200	0.078	0.162	0.132	0.190	0.038	0.278	0.001	0.251
LSTAR(1)	0.028	25	0.033	0.038	0.013	0.037	0.001	0.033	0.000
	50	0.053	0.065	0.025	0.055	0.012	0.052	0.000	0.065
	100	0.065	0.076	0.045	0.087	0.017	0.128	0.000	0.122
	200	0.098	0.192	0.135	0.220	0.058	0.348	0.000	0.269

续表

DGP	n	$Asy_{0.1}$	$Wild_{0.1}$	$Asy_{0.5}$	$Wild_{0.5}$	Asy_1	$Wild_1$	Asy_2	$Wild_2$
MSAR(1)	25	0.056	0.053	0.017	0.059	0.003	0.056	0.000	0.049
	50	0.076	0.081	0.157	0.210	0.013	0.246	0.000	0.279
	100	0.085	0.109	0.243	0.356	0.053	0.424	0.038	0.470
	200	0.124	0.131	0.252	0.407	0.055	0.490	0.034	0.473
Bilinear AR	25	0.056	0.053	0.170	0.259	0.213	0.356	0.002	0.369
	50	0.081	0.093	0.296	0.325	0.276	0.443	0.010	0.453
	100	0.145	0.139	0.643	0.656	0.753	0.824	0.338	0.852
	200	0.224	0.211	0.752	0.797	0.834	0.890	0.474	0.913

注　同表 1

4　结语

使用 Wild Bootstrap 模拟方法对 AR 模型的线性性进行了非参数检验，得到以下几个结论：

（1）对于检验水平，Wild Bootstrap 检验的稳健性比渐近检验的好.

（2）对于检验势，TAR，ESTAR，LSTAR，MSAR 和双线性 AR 模型，Wild Bootstrap 方法比渐近方法的检验势要高，也说明了 Wild Bootstrap 方法的可靠性更高. 此外，TAR 与双线性 AR 模型比其他 3 种 AR 的检验势高. 因此，对于 TAR 与双线性 AR 模型来说，可以首先选择此 2 种模型进行拟合.

参考文献：

[1] 王少平，彭方平. 运用 SETAR 模型对我国通货膨胀率的拟合与预测 [J]. 统计与决策，2006，7：84-85.

[2] LI Qi，WANG Suo-jin. A Simple Consistent Bootstrap Test for a Parametric Regression Function [J]. Journal of Econometrics，1998，87：145-165.

[3] HJELLVIK V，YAO Qi-wei. TJϕSTHEIM D. Linearity Testing Using Local Polynomial Approximation [J]. Journal of Statistical Planning and Inference，1998，68：295-32.

[4] CAI Zong-wu，FAN Jian-qing，YAO Qi-wei. Functional-Coefficient Regression Models for Nonlinear Time Series [J]. Journal of the American Statistical Association，2000，95：941-956.

[5] TAE-HWY LEE. Neural Network Test and Nonparametric Kernel Test for Neglected Nonlinearity in Regression Models [J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics，2001，4(4)：169-182.

[6] ZACHARIAS PSARADAKIS，NICOLA SPAGNOLO. Power Properties of Nonlinearity Tests for Time Series with Markov Regimes [J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics，2002，6(3)：1-14.

[7] MELVIN J HINICH，EDUARDO M MENDES. Detecting Nonlinearity in Time Series：Surrogate and Bootstrap Approaches [J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics，2005，9(4)：1-13.

[8] EFTHYMIOS G PAVLIDIS，IVAN PAYA，DAVID A PEEL. Specifying Smooth Transition Regression Models in the Presence of Conditional Heteroskedasticity of Unknown Form [J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics，2010，14(3)：1-38.

[9] GRANGER C W J，TERÄSVIRTA T. Modelling Nonlinear Economic Relationships [M]. New York：Oxford University Press，1993.

[10] TONG HOWELL. Nonlinear Time Series：A Dynamic System Approach [M]. Oxford：Clarendon，1990.

Wild Bootstrap Nonparametric Kernel Test for Linearity in AR Regression Models

WANG Jing-yong

(Economics and Trade Department of Tongling University，Tongling 244061，Anhui China)

Abstract：This article considers Wild Bootstrap nonparametric kernel test for linearity in AR regression models，and examines finite sample performance：test size and test power. Simulation results show that test reliability and robustness of Wild Bootstrap is higher than asymptotic method，and test power of TAR and bilinear models is better than the others AR models.

Key words：Wild Bootstrap；AR model；test size；test power；nonlinearity

（责任编辑　向阳洁）