第 32 卷　第 3 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 3
2011 年 5 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　May 2011

文章编号:1007-2985(2011)03-0001-03

恰有 6 个极大子群的有限群*

游兴中,朱伟华,刘　峥
(长沙理工大学数学与计算科学学院,湖南 长沙　410114)

摘　要:研究有限群的极大子群的个数对群结构的影响,刻画了恰有 6 个极大子群的有限群的结构.

关键词:有限群;极大子群;共轭
中图分类号:O152.1　　文献标志码:A

极大子群是有限群的一类重要的子群,在有限群结构的研究中起重要的作用.有限群的极大子群的数量性质能够反映该群的许多性质,如文献[1-2]证明了极大子群共轭类类数为 2 的有限群必可解,文献[3-5]研究了极大子群同阶类类数对有限群结构的影响,文献[6-7]对极大子群的个数不大于 5 的有限群的结构给出了刻画.笔者继续文献[6-7]的工作,进一步刻画恰有 6 个极大子群的有限群的结构.

1　相关定义与引理

若 M 是有限群 G 的极大子群,则 $\{M^g \mid g \in G\}$ 为 M 在 G 中的一个共轭类,也称为 M 的一个轨道,其轨道长为 $|G:N_G(M)|$.对自然数 n,$\pi(n)$ 表示 n 的所有素数因子的集合.对有限群 G,记 $\pi(G)=\pi(|G|)$.文中其他未加说明的术语和记号都是标准的(可参见文献[8]).

引理 1[7]　设 G 是有限群且 $N \lhd G$,$\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini 子群,S 为 G 的所有极大子群的集合,$\bar{S}$ 为 G/N 的所有极大子群的集合,则:

(ⅰ) $\bar{S}=\{M/N \mid M \in S$ 且 $MN<G\}$;

(ⅱ) M 是 G 的极大子群当且仅当 $M/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的极大子群;

(ⅲ) M_1 和 M_2 是 G 的不同的极大子群当且仅当 $M_1/\Phi(G)$ 和 $M_2/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的不同的极大子群.

引理 2[7]　若 M 是有限群 G 的极大子群,则 $M \lhd G$ 或 $N_G(M)=M$ 且 $|G:N_G(M)| \geqslant 3$.

引理 3[9]　设 G 是有限群,N 为 G 的正规交换子群.若 $N \cap \Phi(G)=1$,则 N 在 G 中有补,即存在 $A \leqslant G$ 使得 $G=AN$ 且 $A \cap N=1$.

引理 4[7]　设 G 是有限群,N 为 G 的交换的极小正规子群.若 $\Phi(G)=1$,则 N 在 G 中有补,即 $G=MN$ 且 $M \cap N=1$ 对某个 $M \leqslant G$.进一步,若 $N \nleqslant Z(G)$,则 M 是 G 的非正规的极大子群.

引理 5[6]　设 G 是有限群,则:

(ⅰ) 若 G 的所有极大子群共轭,则 G 为素数幂阶循环群,特别地,G 有唯一极大子群;

(ⅱ) G 恰有 2 个极大子群当且仅当 G 为 2 个不同的素数幂阶循环群的直积;

(ⅲ) G 恰有 3 个极大子群当且仅当 G 为 2 元生成的 2 -群或者为 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积.

引理 6　设 G 是非幂零的有限群且 $\Phi(G)=1$,则 G 恰有 5 个极大子群当且仅当 $G \simeq A_4$ 或 $S_3 \times Z_p$,其中 p 为异于 2 的素数.特别地,G 可解.

引理 6 由文献[7]的定理 2 可得.

* 收稿日期:2011-03-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671026;10871205);湖南省科技计划研究项目(2010FJ4136);湖南省教育厅科研项目(10A002)
作者简介:游兴中(1968-),男,湖南桃源人,长沙理工大学数学与计算科学学院教授,博士,主要从事群论研究.

2 定理及其证明

定理 1 设 G 是有限幂零群,则 G 恰有 6 个极大子群当且仅当 G 是下列群之一:

(ⅰ) $G=P_1\times P_2\times P_3\times P_4\times P_5\times P_6$,其中 $P_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 为循环群;

(ⅱ) $G=P_1\times P_2\times P_3\times P_4$,其中 $P_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$,$P_1$ 为二元生成的 2 -群,P_2,P_3 和 P_4 为循环群;

(ⅲ) $G=P_1\times P_2\times P_3$,其中 $P_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 且 P_1 为二元生成的 3 -群,P_2 和 P_3 为循环群;

(ⅳ) G 为二元生成的 5 -群.

定理 1 类似文献[7]的定理 1 的证明可得.

定理 2 设 G 是非幂零的有限可解群且 $\Phi(G)=1$,则 G 恰有 6 个极大子群当且仅当 G 同构于下列情形之一的群:(ⅰ)D_{10};(ⅱ)$[Z_5]Z_4=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=1,b^{-1}ab=a^3\rangle$;(ⅲ)$A_4\times Z_p$,其中 p 为异于 3 的素数;(ⅳ)$S_3\times Z_2$;(ⅴ)$S_3\times Z_p\times Z_q$.其中 $p\neq q$ 为异于 2 的素数.

证明 易证充分性成立.下证必要性.

因为 G 可解且 $\Phi(G)=1$,所以 G 的极小正规子群为初等交换群且 G 的 Fitting 子群 $F(G)$ 是 G 的极小正规子群的积,因此 $F(G)$ 是交换群.由引理 3,$F(G)$ 在 G 中有补 A,于是 $G=F(G)A$ 且 $A\cap F(G)=1$.令 $F(G)=U\times Z(G)$.显然 U 是 G 的极小正规子群的直积,于是令 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_s$,其中 $U_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是 G 的交换的极小正规子群.注意到 G 的 2 阶的正规子群必是中心的,因此 $|U_i|\geqslant 3(1\leqslant i\leqslant s)$.由引理 4,$U_i$ 在 G 中有补 M_i 为 G 的非正规的极大子群.因此含 M_i 的轨道长为 $|G:N_G(M_i)|=|G:M_i|=|U_i|\geqslant 3$.因为 G 可解,所以 G 有正规极大子群.由 G 恰有 6 个极大子群得 $s=1$,即 U 是 G 的极小正规子群,$M=Z(G)A$ 为 G 的极大子群,且轨道长为 $3\leqslant|U|\leqslant 5$.此时 G 恰有 1 个非正规极大子群的共轭类,因此 G/U 的每个极大子群正规,从而 G/U 为幂零群.

情形 1 若 $|U|=5$,则 $U\cong Z_5$,G/U 有唯一的极大子群.因此 G/U,即 $Z(G)A$ 为素数幂阶循环群.于是由 $Z(G)A=Z(G)\times A$ 得 $Z(G)=1$,此时 $G=UA$ 且 A 忠实作用在 U 上.于是 $A\leqslant \mathrm{Aut}(U)=Z_4$,因此 $A=Z_2$ 或 Z_4.若 $A=Z_2$,则 $G\cong D_{10}$,G 为(ⅰ)-型群;若 $A=Z_4$,则 $G\cong[Z_5]Z_4=\langle a,b\mid a^5=b^4=1,b^{-1}ab=a^3\rangle$,$G$ 为(ⅱ)-型群.

情形 2 若 $|U|=4$,则 $U\cong Z_2\times Z_2$.此时 G/U 至多有 2 个极大子群.

假定 G/U 恰有 1 个极大子群,则 G/U,即 $Z(G)A$ 为素数幂阶循环群.类似于情形 1 中的推理得 $Z(G)=1$ 且 $A=Z_2$ 或 Z_3.若 $A=Z_2$,则 $G=UA$ 为 2 -群,于是 $Z(G)>1$,矛盾.故 $A=Z_3$,于是 $G=(Z_2\times Z_2)Z_3\cong A_4$.由引理 6,此时 G 恰有 5 个极大子群,矛盾.

假定 G/U 恰有 2 个极大子群,由引理 5,则 G/U,亦即 $Z(G)A$ 为 2 个不同的素数幂阶循环群的直积,故 $Z(G)A$ 交换群.由 $Z(G)A=Z(G)\times A$ 得 A 循环且忠实作用在 U 上,从而 $A\leqslant \mathrm{Aut}(U)=S_3$,$A=Z_2$ 或 Z_3.若 $A=Z_2$,则 UA 为 2 -群,从而 UA 有非平凡的中心.因为 $G=(U\times Z(G))A$,所以 UA 的中心的元必属于 $Z(G)$,这与 $Z(G)\cap UA=1$ 矛盾.故 $A=Z_3$.因为 $Z(G)$ 为 G 的极小正规子群的直积,所以 $Z(G)$ 为素数阶群.令 $|Z(G)|=p$,其中 p 是不同于 3 的素数.易见 $UA\cong A_4$,于是 $G\cong A_4\times Z_p$,G 为(ⅲ)-型群.

情形 3 若 $|U|=3$,则 $U\cong Z_3$.易见 G/U 的极大子群至多有 3 个.

假定 G/U 恰有 1 个极大子群,则 G/U,即 $Z(G)A$ 为素数幂阶循环群.类似于情形 1 中的推理可得 $G\cong S_3$,但此时 G 恰有 4 个极大子群,矛盾.假定 G/U 恰有 2 个极大子群.类似于情形 2 可得 $A=Z_2$ 且 $Z(G)=Z_p$,其中 p 是异于 2 的素数.于是 $G=S_3\times Z_p$,由引理 6,G 有 5 个极大子群,矛盾.

假定 G/U 恰有 3 个极大子群.由引理 5,则 G/U,亦即 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群或 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积.

若 A 为交换群,因为 $Z(G)A=Z(G)\times A$,所以 A 忠实作用在 U 上,$A\leqslant \mathrm{Aut}(U)=Z_2$,因此 $A=Z_2$.当 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群时,必有 $|Z(G)|=2$,这时 $G=(Z_3\times Z_2)Z_2\cong S_3\times Z_2$,$G$ 为(ⅳ)-型群;当 $Z(G)A$ 为 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积,则 A 交换,于是 $A=Z_2$.因为 $Z(G)$ 为 G 的极小正规子群的直积,所以 $Z(G)=Z_p\times Z_q$,其中 $2,p,q$ 为互不相同的素数.显然 $UA\cong S_3$,这样 $G\cong S_3\times Z_p\times Z_q$,$G$ 为(ⅴ)-型群.

若 A 为非交换群,则 $Z(G)A$ 只能为 2 元生成的 2 -群.若 $Z(G)\neq 1$,则 $|Z(G)|=2$,这样由 $Z(G)A=Z(G)\times A$ 得 A 循环,矛盾.因此 $Z(G)=1$,A 为 2 元生成的非交换群 2 -群.因为 A 为 G 的非正规极大子群且 $|G:A|=3$,所以可设 G 的另 3 个极大正规子群为 M_1,M_2,M_3,则 $G/M_i\cong Z_2$.令 N 为 A 在 G 中的核,则 $G/N\cong S_3$.若 $N=1$,则 $G\cong S_3$,G 恰有 4 个极大子群,矛盾.故 $N>1$.若 $N\leqslant M_i$,$i=1,2,3$,则 $N=N\cap M_1\cap M_2\cap M_3=\Phi(G)=1$,矛盾.故可假定 $N\not\leqslant M_1$,则 $G=NM_1$.因此 $G/N\cap M_1\cong N/N\cap M_1\times M_1/N\cap M_1$.同理若 $N\cap M_1\leqslant M_2$ 且 $N\cap M_1\leqslant M_3$,则 $N\cap M_1=\Phi(G)=1$,从而 $G=N\times M_1$.注意到 $N\cong G/M_1$ 且 $|G/M_1|=2$,所以 $N\leqslant Z(G)$,矛盾.故可假定 $N\cap M_1\not\leqslant M_2$,此时 $G=(N\cap M_1)M_2$.令 $K=N\cap M_1\cap M_2$,则 $G/K=(N\cap M_1)/K\times M_2/K$ 且 $(N\cap M_1)/K\cong G/M_2$.同理若 $K\leqslant M_3$,则 $G=(N\cap M_1)\times M_2$ 且 $N\cap M_1\leqslant Z(G)$,矛盾.因此 $K\not\leqslant M_3$,$G=KM_3$.因为 $K\cap M_3=\Phi(G)=1$,所以 $G=K\times M_3$.注意到 $K\cong G/M_3$ 且

$|G/M_3|=2$，同样有 $K\leqslant Z(G)$，矛盾.

定理3　设 G 是非幂零的有限群，则 G 恰有6个极大子群当且仅当 G 是下列情形之一的可解群：

（ⅰ）$G/\Phi(G)\cong D_{10}$ 且 $G=PQ$，其中 $P\in \mathrm{Syl}_5(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_2(G)$ 且 $P\lhd G$，Q 为 G 的非正规循环子群；

（ⅱ）$G/\Phi(G)\cong[Z_5]Z_4=\langle a,b,c\mid a^5=b^2=1,b^{-1}ab=a^3\rangle$ 且 $G=PQ$，其中 $P\in \mathrm{Syl}_5(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_2(G)$ 且 $P\lhd G$，Q 为 G 的非正规循环子群；

（ⅲ）$G/\Phi(G)\cong A_4\times Z_p$，其中 p 为异于3的素数；

（ⅳ）$G/\Phi(G)\cong S_3\times Z_2$；

（ⅴ）$G/\Phi(G)\cong S_3\times Z_p\times Z_q$，其中 $p\neq q$ 为异于2的素数.

证明　易见充分性成立. 下证必要性.

首先断言 G 为可解群. 令 G 为极小反例. 由引理1，G 的任意同态像的极大子群的个数不大于6，所以可设 G 有唯一的极小正规子群 N 且 G/N 可解而 N 不可解. 假定 $C_G(N)\neq 1$. 因为 $C_G(N)\lhd G$，所以 $N\leqslant C_G(N)$，从而 N 为交换群，与 N 不可解矛盾. 故必有 $C_G(N)=1$. 若 N 包含于 G 的每一个极大子群，则 $N\leqslant\Phi(G)$. 但由 $\Phi(G)$ 幂零得 N 可解，矛盾. 于是有 G 的极大子群 M 使得 $N\not\leqslant M$. 因此 $G=MN$ 且 $M\cap N<N$. 令 p 是 $|N:M\cap N|$ 的素因子，$P\in \mathrm{Syl}_p(N)$. 因为 N 不可解，所以 $P<N$. 由于 N 是 G 的唯一极小正规子群，因此 P 在 G 中不正规，即有 $N_G(P)<G$. 令 K 是 G 的包含 $N_G(P)$ 的极大子群. 易见 M，K 在 G 中不共轭，也不在 G 中正规，因此由 G 有6个极大子群得 $|G:M|=|G:K|=3$. 令 $P\in \mathrm{Syl}_3(G)$，则 P 不包含于 M 或 K 中，从而 $N_G(P)$ 不包含于 G 的任一极大子群，必有 $N_G(P)=G$，于是 $P\lhd G$. 因此 $N\leqslant P$，与 N 不可解矛盾. 故 G 为可解群.

由引理1，$G/\Phi(G)$ 恰有6个极大子群. 因为 $G/\Phi(G)$ 有平凡的 Frattini 子群，所以由定理2，$G/\Phi(G)$ 为定理2中的（ⅰ）至（ⅴ）-型群.

若 $G/\Phi(G)\cong D_{10}$，则 $\pi(G)=\pi(G/\Phi(G))=\{2,5\}$. 令 $P\in \mathrm{Syl}_5(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_2(G)$，$H=P\Phi(G)$ 且 $K=Q\Phi(G)$，则 $H/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的正规极大子群，$K/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的非正规极大子群. 于是 H 为 G 的正规极大子群且 $|G:H|=2$，K 为 G 的非正规极大子群且 $|G:K|=5$. 因为 $|G:N_G(P)|$ 为2的方幂，若 $N_G(P)<G$，则 $N_G(P)\leqslant H$，因此 $H=N_G(H)$，与 $H\lhd G$ 矛盾，所以 $N_G(P)=G$，即 $P\lhd G$. 由 G 非幂零得 Q 不在 G 中正规是显然的. 令 M_1，M_2 为 Q 的极大子群，则 PM_1，PM_2 为 G 的极大子群，且 $|G:PM_1|=|G:PM_2|=2$，因此 $PM_1=PM_2=H$. 令 $x\in M_1$，则存在 $y\in P$ 和 $z\in M_2$ 使得 $x=yz$. 于是 $y=xz^{-1}\in P\cap Q$，因此 $x=z$，从而 $M_1\subseteq M_2$. 同理可得 $M_1=M_2$，这样 Q 有唯一的极大子群，因而 Q 为循环群. 这样（ⅰ）成立. 若 $G/\Phi(G)=[Z_5]Z_4$，类似于上面的推理可得（ⅱ）成立.

参考文献：

[1] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups [J]. Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. Enat.，1979，66：175-178.

[2] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups II [J]. Ibib.，1980，68：179.

[3] 施武杰. 极大子群同阶类类数不大于2的有限群 [J]. 数学年刊：A辑，1985(5)：532-537.

[4] 李世荣. 非正规极大子群同阶类类数等于2的有限群 [J]. 数学学报，1990(3)：388-392.

[5] 黎先华. 极大子群同阶类类数=3的有限群 [J]. 数学学报，1994(1)：108-115.

[6] 王立中. 极大子群个数<5的有限群 [J]. 首都师范大学学报：自然科学版，2000，21(3)：10-13.

[7] 游兴中，王香芬，陈为敏. 恰有5个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2010，31(5)：8-10.

[8] HUPPET B. Endlich Gruppen I [M]. Berlian：Springer-Verlag，1979.

[9] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，1999.

Finite Groups with Just 6 Maximal Subgroups

YOU Xing-zhong，ZHU Wei-hua，LIU Zheng

（College of Mathematics and Computing Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410114，China）

Abstract：The authors investigate how the number of maximal subgroups of a finite group influences its structure and determine the structure of a finite group with just six maximal subgroups in this paper.

Key words：finite group；maximal subgroup；conjugacy

（责任编辑　向阳洁）