文章编号:1007－2985(2012)01－0003－04

3 阶非线性微分方程解的 Sturm 比较定理*

秦宏立,李飞飞
(延安大学数学与计算机学院,陕西 延安　716000)

摘　要:利用微分不等式,讨论了一类 3 阶非线性微分方程解的 Sturm 比较定理,得到了其解的零点存在的充分性条件.

关键词:非线性微分方程;Sturm 比较定理;零点;充分性条件
中图分类号:O175.29　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.3969/j.issn.1007－2985.2012.01.002

众所周知,2 阶线性齐次微分方程的 Sturm 分离定理与比较定理[1],是研究微分方程振动性的重要工具之一[2].随着研究的深入,近年来 Sturm 比较定理已被许多学者推广.譬如,程崇高等[3-6]研究了 2 阶线性与非线性微分方程的解及其导数的 Sturm 比较定理;庄容坤[7-9]中研究了 2 阶自共轭微分系统与 2 阶非线性中立型微分方程解的 Sturm 比较定理;薛巧梅等[10]给出了 3 阶线性齐次微分方程解的 Sturm 比较定理;张荣荣等[11]给出了 2 阶线性方程的同值振动性及零点定理的推广.笔者通过几个微分不等式,讨论了如下 3 阶线性与非线性微分方程在 $f(y')$具有单调性时解的 Sturm 比较定理,并得到了其解的零点存在的充分性条件:

$$(p_1(t)x'')'+q_1(t)x'=0,\tag{1}$$

$$(p_2(t)\varphi(y')y'')'+q_2(t)f(y')=0.\tag{2}$$

其中:$p_i(t)\in C'[a,b]$,$q_i(t)\in C[a,b]$,$0<a<b$,$i=1,2$;$f(y')$,$\varphi(y')\in C(\mathbf{R})$且 $y'f(y')>0$,$\varphi(y')>0$,$y'\neq 0$.

在文中总假设如下条件成立:

(H_1) $f(y')$ 存在,$y'\in\mathbf{R}$,$f(y')>0$ 且 $\dfrac{\varphi(y')}{f'(y')}\leqslant K$,$y'\neq 0$,$K$ 为常数.

1　相关引理

引理 1　设条件(H_1)成立,$x(t)$ 是方程(1)的非平凡解,若 $y(t)\neq 0$,$t\in[a,b]$,则下列不等式成立:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x'}{f(y')}(p_1x''f(y')-x'p_2\varphi(y')y'')\right)'\geqslant p_2\varphi(y')\Big(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\\&\qquad\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}}\Big)^2+(q_2-q_1)x'^2+(p_1-kp_2)x''^2,\end{aligned}\tag{3}$$

* **收稿日期:**2011－06－17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);陕西省教育厅专项科研计划项目(10JK430)
作者简介:秦宏立(1954－),男,陕西富县人,延安大学数学与计算机学院教授,主要从事微分方程稳定性与振动性研究.

$$((p_1x''-\frac{x'p_2\varphi(y')y''}{f(y')})x'-\frac{1}{2}x'^2(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1}))'\geqslant p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2+$$
$$p_2(1-K)x''^2+(q_2-p_2p_1^{-1}q_1-\frac{1}{2}(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})')x'^2. \tag{4}$$

证明 首先证明不等式(3).对其左端直接求导,并结合方程(1),(2)和条件(H_1),有

$$(\frac{x'}{f(y')}(p_1x''f(y')-x'p_2\varphi(y')y''))'=(\frac{1}{f(y')}(p_1x'x''f(y')-x'^2p_2\varphi(y')y''))'=$$
$$\frac{1}{f(y')}((p_1x'')'x'f(y')+p_1x''^2f(y')+p_1x'x''f'(y')y''-(p_2\varphi(y')y'')'x'^2-$$
$$2x'x''p_2\varphi(y')y'')-\frac{f'(y')y''}{f^2(y')}(p_1x'x''f(y')-x'^2p_2\varphi(y')y'')=-q_1x'^2+$$
$$p_1x''^2+q_2x'^2-\frac{2x'x''p_2\varphi(y')y''}{f(y')}+\frac{x'^2y''^2f'(y')p_2\varphi(y')}{f^2(y')}=$$
$$(q_2-q_1)x'^2+p_1x''^2+p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2-\frac{p_2\varphi(y')x''^2}{f'(y')}\geqslant$$
$$p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2+(q_2-q_1)x'^2+(p_1-kp_2)x''^2,$$

即不等式(3)得证.

同理,由方程(1),(2)和条件(H_1),知

$$((p_1x''-\frac{x'p_2\varphi(y')y''}{f(y')})x')'=(p_1x''x'-\frac{x'^2p_2\varphi(y')y''}{f(y')})'=(\frac{p_2p_1x''x'}{p_1})'-(\frac{x'^2p_2\varphi(y')y''}{f(y')})=$$
$$\frac{p_2}{p_1}(p_1x'')'x'+p_2x''^2+\frac{p_2'p_1-p_1'p_2}{p_1^2}p_1x''x'-\frac{2x'x''p_2\varphi(y')y''}{f(y')}+q_2x'^2+$$
$$\frac{x'^2y''^2f'(y')p_2\varphi(y')}{f^2(y')}=p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2-$$
$$\frac{x''^2p_2\varphi(y')}{f(y')}+p_2x''^2+(q_2-p_2p_2^{-1}q_1)x'^2+(p_2'-p_2p_1^{-1}p_1)x'x''.$$

又因为

$$(\frac{1}{2}x'^2(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1}))'=\frac{1}{2}(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})'x'^2+(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})x''x',$$

所以

$$((p_1x''-\frac{x'p_2\varphi(y')y''}{f(y')})x'-\frac{1}{2}x'^2(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1}))'\geqslant p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2+$$
$$(q_2-p_2p_1^{-1}q_1-\frac{1}{2}(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})')x'^2,$$

即不等式(4)得证.

引理 2 设条件(H_1)成立,$x(t)$是方程(1)的非平凡解,若$y(t)\neq 0,t\in[a,b]$,则下列不等式成立:

$$((p_1x''-\frac{x'p_2\varphi(y')y''}{f(y')})x')'\geqslant p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2+(\sqrt{p_2(1-K)}x''+$$
$$\frac{(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})x'}{2\sqrt{p_2(1-k)}})^2+(q_2-p_2p_1^{-1}q_1-\frac{(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})^2}{4p_2(1-K)})x'^2, \tag{5}$$

$$((p_1x''-\frac{x'p_2\varphi(y')y''}{f(y')})x')'\geqslant p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2+(\sqrt{q_2-p_2p_1^{-1}q_1}x'-$$

$$\frac{(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})x''}{2\sqrt{q_2-p_2p_1^{-1}q_1}})^2+(p_2(1-K)-\frac{(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})^2}{4(q_2-p_2p_1^{-1}q_1)})x''^2, \tag{6}$$

$$(-\frac{x'^2p_2\varphi(y')y''}{f(y')})'\geqslant p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2+(q_2x'^2-p_2Kx''^2). \tag{7}$$

引理 2 的证明与引理 1 类似，故略去.

2　主要结果

定理 1　设条件(H_1)成立，$\alpha,\beta\in[a,b]$是方程(1)的非平凡解的导函数$x'(t)$的两相邻零点，若

$$\int_\alpha^\beta(q_2-q_1)x'^2+(p_1-kp_2)x''^2\mathrm{d}t>0, \tag{8}$$

则方程(2)的解$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

证明　采用反证法. 若不然，$y(t)\neq 0,t\in[a,b]$，则由引理 1 知不等式(3)成立，对(3)式两端从α到β积分，得

$$\int_\alpha^\beta(\frac{x'}{f(y')}(p_1x''f(y')-x'p_2\varphi(y')y''))'\mathrm{d}t\geqslant\int_\alpha^\beta p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2\mathrm{d}t+\int_\alpha^\beta(q_2-q_1)x'^2+(p_1-kp_2)x''^2\mathrm{d}t. \tag{9}$$

又因为$x'(\alpha)=x'(\beta)=0$，所以

$$\int_\alpha^\beta(\frac{x'}{f(y')}(p_1x''f(y')-x'p_2\varphi(y')y''))'\mathrm{d}t=(\frac{x'}{f(y')}(p_1x''f(y')-x'p_2\varphi(y')y''))_\alpha^\beta=0.$$

由(8)，(9)式得

$$0\geqslant\int_\alpha^\beta p_2\varphi(y')(\frac{x'y''\sqrt{f'(y')}}{f(y')}-\frac{x''}{\sqrt{f'(y')}})^2\mathrm{d}t+\int_\alpha^\beta(q_2-q_1)x'^2+(p_1-kp_2)x''^2\mathrm{d}t>0.$$

于是矛盾，故$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

推论 1　若$p_1\geqslant kp_2,q_2\geqslant q_1$，等号在$[\alpha,\beta]$内不恒成立，其他条件同定理 1，则方程(2)的解$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

定理 2　设条件(H_1)成立，$\alpha,\beta\in[a,b]$是方程(1)非凡解的导函数$x'(t)$的两相邻零点，若

$$\int_\alpha^\beta(p_2(1-K)x''^2+(q_2-p_2p_1^{-1}q_1-\frac{1}{2}(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})')x'^2)\mathrm{d}t>0,$$

则方程(2)的解$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

定理 2 的证法与定理 1 类似，故略去.

推论 2　若$k\leqslant 1$，即$\varphi(y')\leqslant f'(y')$，$q_2\geqslant p_2p_1^{-1}q_1+\frac{1}{2}(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})'$，等号在$[\alpha,\beta]$内不恒成立，其他条件同定理 2，则方程(2)的解$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

定理 3　设条件(H_1)成立，且$k<1$，$\alpha,\beta\in[a,b]$是方程(1)的非凡解的导函数$x'(t)$的两相邻零点，若

$$\int_\alpha^\beta(q_2-p_2p_1^{-1}q_1-\frac{(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})^2}{4p_2(1-K)})x'^2\mathrm{d}t>0,$$

则方程(2)的解$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

推论 3　若$q_2\geqslant p_2p_1^{-1}q_1+\frac{(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})^2}{4p_2(1-K)}$，等号在$[\alpha,\beta]$内不恒成立，其他条件同定理 3，则方程(2)的解$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

定理 4　设条件(H_1)成立，且$q_2\geqslant p_2p_1^{-1}q_1$，$t\in[\alpha,\beta]$，$\alpha,\beta\in[a,b]$是方程(1)的非凡解的导函数$x'(t)$的两相邻零点，若

$$\int_\alpha^\beta(p_2(1-K)-\frac{(p_2{}'-p_2p_1{}'p_1^{-1})^2}{4(q_2-p_2p_1^{-1}q_1)})x''^2\mathrm{d}t>0,$$

则方程(2) 的解 $y(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

推论 4 若

$$p_2(1-K)\geqslant\frac{(p_2'-p_2p_1'p_1^{-1})^2}{4(q_2-p_2p_1^{-1}q_1)},$$

等号在$[\alpha,\beta]$内不恒成立,其他条件同定理 4,则方程(2) 的解 $y(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

定理 5 设条件(H_1) 成立,若存在 $x(t)\in C^2[\alpha,\beta]$,$x'(\alpha)=x'(\beta)$,使$\int_\alpha^\beta(q_2x'^2-p_2Kx''^2)\mathrm{d}t>0$,则方程(2) 的解 $y(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上至少有 1 个零点.

利用不等式(3) 至(7),定理 3 至定理 5 的证法与定理 1 类似,故略去.

参考文献:

[1] 邓宗琦.常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论 [M].第 1 版.武昌:华中师范出版社,1987.
[2] 燕居让.常微分方程振动理论 [M].太原:山西教育出版社,1992.
[3] 程崇高,邓宗琦.一个微分积分-恒等式及其应用 [J].华中师范大学学报:自然科学版,1993(4):443-445.
[4] 程崇高.二阶非线性微分方程的 Picone 恒等式与 Sturm 比较定理 [J].数学物理学报,2001(S1):598-602.
[5] 程崇高,周正新.二阶非线性微分方程的 Sturm 比较定理与振动性 [J].扬州大学学报,2002(2):17-20.
[6] 程崇高.二阶线性齐次方程解及其导数的 Sturm 比较定理 [J].数学杂志,1994,14(2):247-251.
[7] 庄容坤.二阶非线性微分方程解的 Sturm 比较定理 [J].高校应用数学学报,2003,18(2):133-138.
[8] 庄容坤.二阶自共轭微分系统解的 Sturm 比较定理 [J].工程数学学报,1999(4):117-120.
[9] 庄容坤.二阶非线性中立型微分方程的 Sturm 比较定理 [J].中山大学学报,2005(1):5-8.
[10] 薛巧梅,秦宏立,张荣荣.三阶线性齐次微分方程解的 Sturm 比较定理 [J].榆林学院学报,2009,19(4):18-19.
[11] 张荣荣,秦宏立.二阶线性方程的同值振动性及零点定理的推广 [J].延安大学学报:自然科学版,2009,28(1):20-22.

Sturm Comparison Theorem of Three Order Nonlinear Differential Equations

QIN Hong-li,LI Fei-fei
(School of Mathematics and Computer Science,Yan'an University,Yan'an 716000,Shaanxi China)

Abstract:Using differential inequality,the Sturm comparison theorem of a class of third order nonlinear differential equations is discussed,and the zero point existence of the equations is obtained.

Key words:nonlinear differential equations;Sturm comparison theorem;zero point;sufficient conditions

(责任编辑 向阳洁)