摘要： 第 33 卷 第 1 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 1
2012 年 1 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Jan. 2012

文章编号:1007－2985(2012)01－0023－03

矩阵的三角分解与应用*

顾江永
(宿迁学院教育系,江苏 宿迁 223800)

摘 要:对矩阵的三角分解理论作了比较全面的论述,重点解析了矩阵三角分解的确定和推广,并介绍了在解线性方程组和群论中的应用.

关键词:初等矩阵;初等变换;三角分解;同构

中图分类号:O151.21 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1007－2985.2012.01.007

如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 可分解成一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个单位上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积,那么称 $\boldsymbol{A}$ 可作三角分解或 $\boldsymbol{LU}$ 分解.[1] 矩阵的三角分解是 1948 年英国数学家(A. Turing,1912—1954) 提出的,它在计算机人工智能、数理逻辑、计算数学、线性方程组的求解等方面有广泛的应用.

1 相关引理

引理 1 单位上(下) 三角矩阵的乘积单位上(下) 三角矩阵.

引理 2 单位上(下) 三角矩阵的逆矩阵还是单位上(下) 三角矩阵.

引理 3[2] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 施行 1 次初等行变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;对 $\boldsymbol{A}$ 施行 1 次初等列变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

2 主要结果

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可以三角分解的充分必要条件为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 1 阶到 $n-1$ 阶顺序主子式[3] 都不等于 0.

证明 充分性的证明见文献[2].

下证必要性.设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$,构造分块矩阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{B}_i\\ \boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{D}_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_i & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_i & \boldsymbol{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_i & \boldsymbol{V}_i\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W}_i\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{U}_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}$ 的第 i 阶顺序主子式对应的矩阵.由分块矩阵的乘法知 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{U}_i(i=1,2,\cdots,n-1)$,又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异,所以矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的主对角线上的元都不为 0,从而 $\boldsymbol{L}_i$ 非奇异.再由矩阵 $\boldsymbol{U}$ 为单位上三角形矩阵,故 $\boldsymbol{A}_i$ 非奇异,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 1 阶到 $n-1$ 阶顺序主子式都不等于 0.

3 三角分解的确定

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$,其中 $\boldsymbol{L}$ 是下三角矩阵,$\boldsymbol{U}$ 是单位上三角矩阵,设

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_{11} & 0 & \cdots & 0\\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1 & u_{12} & \cdots & u_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

* **收稿日期:**2011－11－18
基金项目:宿迁学院精品课程建设资助项目(S112012002)
作者简介:顾江永(1977－),男,江苏宿迁人,宿迁学院教育系讲师,主要从事基础代数和群论研究.

由矩阵乘法可知，$a_{ij}=\sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is}u_{sj}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 又因为 $u_{mm}=1$，所以 $a_{im}=l_{im}+\sum_{s=1}^{m-1} l_{is}u_{sm}$，$i=m,m+1,\cdots,n$. 从而，有 $l_{im}=a_{im}-\sum_{s=1}^{m-1} l_{is}u_{sm}$，$i=m,m+1,\cdots,n$.

同理可得，$u_{mj}=(a_{mj}-\sum_{s=1}^{m-1} l_{ms}u_{sj})/l_{mm}$，$j=m+1,m+2,\cdots,n$. 这样就求出了矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$.

4 2个推论

推论1 若 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 阶顺序主子式有的为0，则可以在 $\boldsymbol{A}$ 的左边或右边乘以初等矩阵，就将 $\boldsymbol{A}$ 的行或列的次序重新排列，使 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 阶顺序主子式非0，从而可以进行三角分解.

推论2 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶非奇异矩阵，则必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与非奇异上三角形矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$. 此时称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以进行 $\boldsymbol{QR}$ 分解.

证明 设 $V=F^n$，因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基，利用施密特正交化，再单位化，可得到 V 的一个标准正交基设为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，且有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\mathrm{diag}(|\boldsymbol{\alpha}_1|,|\boldsymbol{\alpha}_2|,\cdots,|\boldsymbol{\alpha}_n|)\boldsymbol{P}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$，$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}(|\boldsymbol{\alpha}_1|,|\boldsymbol{\alpha}_2|,\cdots,|\boldsymbol{\alpha}_n|)\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{R}$ 是上三角形矩阵，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\2&3&5\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与非奇异上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\2&3&5\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维列向量，且它们线性无关. 利用施密特正交化，取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}.$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\boldsymbol{\beta}_3$. 从而，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{5}&\\&&\sqrt{\frac{15}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以可得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，非奇异上三角矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{5}&\\&&\sqrt{\frac{15}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{6}&\frac{3\sqrt{6}}{2}\\0&\sqrt{5}&\sqrt{5}\\0&0&\sqrt{\frac{15}{2}}\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

5 三角分解在解方程组中的应用

设线性方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，于是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 就可以转化为 $(\boldsymbol{LU})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{UX})=\boldsymbol{b}$. 令 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$，这样可将方程组的求解问题转化为2个系数矩阵是三角矩阵的易于求解的方程组 $\boldsymbol{LY}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$.

例2 用 $\boldsymbol{LU}$ 分解法求解下列方程组：$\begin{pmatrix}1&-1&5\\1&2&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$.

解 令 $\begin{pmatrix}l_{11}&0&0\\l_{21}&l_{22}&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&u_{12}&u_{13}\\0&1&u_{23}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\1&2&-1\\2&3&4\end{pmatrix}$，由矩阵乘法可得

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故原方程组可化为以下 2 个三角形方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

由方程组(1) 可解得 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，代入方程组(2)，解之得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6　三角分解在群论中的应用

设集 $M = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}$ 为对角阵，且 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A} \in C^{n\times n}\}$，$N = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}$ 为非奇异对角阵，$\boldsymbol{A} \in C^{n\times n}\}$，$N_1 = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，$\boldsymbol{A} \in N\}$，则 M, N 对于矩阵的乘法作成一个群. 设 $\boldsymbol{A} \in N$，则由前可知，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{R}$ 为非奇异上三角矩阵. 所以，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{AR}^{-1}$ 为上三角形矩阵，又 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，故 $\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵，从而 $\boldsymbol{Q} \in M$. 作集合 N 到 M 的映射 $\sigma: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Q}$，则 σ 为群的同态满射，故 $M \cong N/N_1$[4].

参考文献：

[1]　方保镕. 矩阵论 [M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[2]　北京大学数学系. 高等代数 [M]. 第 3 版. 北京：高等教育出版社，2003.

[3]　同济大学应用数学系. 线性代数 [M]. 第 4 版. 北京：高等教育出版社，2003.

[4]　徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 第 2 版. 北京：科学出版社，1999.

Matrix's Triangular Factorization and Its Application

GU Jiang-yong

(Department of Education, Suqian College, Suqian 223800, Jiangsu China)

Abstract: The triangular factorization of matrix theory is comprehensively discussed, with the identification and promotion of matrix triangular factorization being mainly explained, as well as its application in solving linear equations and group theory.

Key words: elementary matrix; elementary transformations; triangular factorization; isomorphism

(责任编辑　向阳洁)