第 28 卷　第 4 期
2007 年 7 月

吉首大学学报(自然科学版)
Journal of Jishou University (Natural Science Edition)

Vol. 28　No. 4
Jul. 2007

文章编号: 1007-2985(2007)04-0008-04

NA 阵列的收敛性*

张立伟, 杨新建
(湖南范大学数学与计算机科学学院, 湖南 长沙　410081)

摘　要: 建立了 NA 阵列的一个概率不等式及相关的矩不等式, 研究了 NA 随机变量阵列的依概率收敛性、完全收敛性和几乎处处收敛性.

关键词: NA 阵列; 依概率收敛; 完全收敛; 几乎处处收敛
中图分类号: O211.4　　　　文献标识码: A

NA(Negatively Associated) 随机变量在可靠性理论、渗透理论及多元统计分析中有广泛应用, 因而引起了人们对 NA 序列极限性质的研究兴趣, 并得到了很多与独立情形一致的相关结论.

定义 1[1]　称随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, $n \geqslant 2$ 是 NA 的, 若对于集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的任意 2 个不相交的非空子集 A_1, A_2, 都有 $\mathrm{Cov}(f_1(X_i, i \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2)) \leqslant 0$, 其中 f_1, f_2 是任意 2 个使得上述协方差存在并对每个变元均非降的函数. 称随机变量序列 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 是行间 NA 的, 若对任意自然数 $n \geqslant 2$, $X_1, \cdots, X_n$ 都是 NA 的.

为简洁起见, 文中在没有特别申明的情况下, 均以 C 记各种正绝对常数.

1　NA 阵列的一些不等式

仿照文献[2] 中的 2 个定理, 对 NA 阵列建立了如下关于部分和及最大部分和的不等式.

定理 1　设 $\{X_{nj}, 1 \leqslant j \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 为零均值的 NA 阵列, 存在 $p \geqslant 2$, 使 $E|X_{nj}|^p < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $n \geqslant 1$. 记 $S_{nn} = \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$, 则对任何 $t > p/2$ 与任何 $x > 0$, 有

$$P(|S_{nn}| \geqslant x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(|X_{nj}| \geqslant x/t) + 2\mathrm{e}^t\{1 + x^2/(t\sum_{j=1}^{n} EX_{nj}^2)\}^{-t}; \tag{1}$$

且存在仅与 p 有关的常数 $C_p > 0$, 使得

$$E|S_{nn}|^p \leqslant C_p(\sum_{j=1}^{n} E|X_{nj}|^p + (\sum_{j=1}^{n} EX_{nj}^2)^{p/2}), \tag{2}$$

$$E|S_{nn}|^p \leqslant C_p n^{p/2-1} \sum_{j=1}^{n} E|X_{nj}|^p.$$

定理 2　设 $\{X_{nj}, 1 \leqslant j \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 为零均值的行间 NA 阵列. 设存在某个 $p \geqslant 2$, 有 $\beta_p =: \sup_{n,j} E|X_{nj}|^p$

* 收稿日期: 2006-10-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571051); 高校博士点专项科研基金项目(20040542006)
作者简介: 张立伟(1981-), 女, 山东烟台人, 湖南师范大学数学与计算机科学学院研究生, 主要从事极限理论研究; 杨新建(1959-), 男, 湖南湘乡人, 湖南师范大学数学与计算机科学学院教授, 硕士生导师, 主要从事概率论中广义随机场及扩散过程的分形性质研究.

$<\infty$. 记 $S_{a,k}^{(n)}=\sum_{j=0}^{k-a}X_{n,a+j}$, $S_{1,k}^{(n)}=S_k$, $\beta_2=:\sup_{n,j}EX_{nj}^2$, $1\leqslant k\leqslant n$, 则存在仅与 p 有关的常数 $K_p\geqslant 1$, 使得对任意自然数 a, n, 有

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_{a,k}^{(n)}|)^p\leqslant K_p(n\beta_p+(n\beta_2)^{p/2}),\tag{3}$$

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_{a,k}^{(n)}|)^p\leqslant K_p\beta_p n^{p/2}.$$

2　NA 阵列的若干收敛性

定理 3[3]　设 $\{X_{nj},1\leqslant j\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 为零均值的行间 NA 阵列, 设存在某个随机变量 X, 对 $\forall x>0$, 有 $P(|X_{nj}|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x)$, 且对某个 $p\geqslant 2$, 有 $\beta_p=:E|X|^p<\infty$, 则对 $S_{nn}=\sum_{j=1}^{n}X_{nj}$, 有 $S_{nn}/n^{1/2+1/p}\xrightarrow{P}0$.

证明　记 $X'_{nj}=X_{nj}/n^{1/2+1/p}$, $S'_{nn}=\sum_{j=1}^{n}X'_{nj}$. 由于

$$E|X_{nj}|^p=p\int_0^{\infty}x^{p-1}P(|X_{nj}|\geqslant x)\,\mathrm{d}x\leqslant p\int_0^{\infty}x^{p-1}P(|X|\geqslant x)\,\mathrm{d}x=E|X|^p<\infty,\text{[4]}\tag{4}$$

因此有 $E|X'_{nj}|^p<\infty$. 则由(1) 式可知, 对任何 $x>0$, 有

$$P(|S'_{nn}|\geqslant x)\leqslant\sum_{j=1}^{n}P(|X_{nj}|\geqslant n^{1/2+1/p}x/t)+2e^t\{1+x^2/(t\sum_{j=1}^{n}n^{-2(1/2+1/p)}EX_{nj}^2)\}^{-t}\triangleq I_1+I_2.\tag{5}$$

现只需证明当 $n\to\infty$ 时,

$$P(|S'_{nn}|\geqslant x)\to 0.\tag{6}$$

对 I_1, 由 Markov 不等式可知, 对 $p\geqslant 2$, 有

$$I_1\leqslant\sum_{j=1}^{n}P(|X|\geqslant n^{1/2+1/p}x/t)\leqslant\sum_{j=1}^{n}(n^{1/2+1/p}x/t)^{-p}E|X|^p\leqslant cn^{-p/2}\to 0\qquad n\to\infty.\tag{7}$$

由 Hölder 不等式及(4) 式可知,

$$\sum_{j=1}^{n}n^{-2(1/2+1/p)}EX_{nj}^2\leqslant n^{-2/p}E|X|^2\leqslant n^{-2/p}(E(|X|^2)^{p/2})^{2/p}=n^{-2/p}(E|X|^p)^{2/p}\to 0\qquad n\to\infty.\tag{8}$$

从而 $I_2\to 0$, $n\to\infty$. 由(5), (7), (8) 式可知(6) 式成立.

定理 4　设 $\{X_{nj},1\leqslant j\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 是行间 NA 阵列, 且 $EX_{nj}=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, $n\geqslant 1$. 设存在 $p\geqslant 2$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}n^{-\alpha p}E|X_{nj}|^p<\infty$, 其中 $\alpha=1+1/p$. 对随机变量 X, 有 $\sup_{n,j}EX_{nj}^2<EX^2$, 且 $EX^2<\infty$, 则对 $S_{nn}=\sum_{j=1}^{n}X_{nj}$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|S_{nn}/n^{\alpha}|\geqslant\varepsilon)<\infty$.

证明　记 $Y_{nj}=X_{nj}I_{(|X_{nj}|\leqslant n^{\alpha})}+n^{\alpha}I_{(X_{nj}>n^{\alpha})}-n^{\alpha}I_{(X_{nj}<-n^{\alpha})}$, $Y_{nj}^{c}=X_{nj}I_{(|X_{nj}|>n^{\alpha})}-n^{\alpha}I_{(X_{nj}>n^{\alpha})}+n^{\alpha}I_{(X_{nj}<-n^{\alpha})}$, $T_n=\sum_{j=1}^{n}Y_{nj}$, $T_n^{c}=\sum_{j=1}^{n}Y_{nj}^{c}$. 由于 $Y_{nj}+Y_{nj}^{c}=X_{nj}$, 因此欲证结论成立, 只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|T_n^{c}|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<\infty,$$

$$ET_n/n^{\alpha}\to 0\qquad n\to\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|T_n-ET_n|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<\infty.\tag{9}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|T_n^{c}|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}P(Y_{nj}^{c}\neq 0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}P(|X_{nj}|>n^{\alpha})\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{|X_{nj}|>n^{\alpha}}\frac{E|X_{nj}|^{p}}{n^{\alpha p}}\mathrm{d}P \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}n^{\alpha p}E|X_{nj}|^{p}<\infty,$$

$$|ET_{n}/n^{\alpha}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|EX_{nj}I_{(|X_{nj}|>n^{\alpha})}|/n^{\alpha}+\sum_{j=1}^{n}P(X_{nj}>n^{\alpha}) \leqslant 2\sum_{j=1}^{n}n^{-\alpha p}E|X_{nj}|^{p}. \tag{10}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}n^{-\alpha p}E|X_{nj}|^{p}<\infty$,当 $n\to\infty$ 时,有 $\sum_{j=1}^{n}n^{-\alpha p}E|X_{nj}|^{p}\to 0$. 由Markov不等式及(2)式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|T_{n}-ET_{n}|\geqslant \varepsilon n^{\alpha}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{-p}n^{-\alpha p}E|T_{n}-ET_{n}|^{p} \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}n^{-\alpha p}E|Y_{nj}|^{p}+ c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha p}\Big(\sum_{j=1}^{n}EY_{nj}^{2}\Big)^{p/2}\triangleq J_{1}+J_{2}.$$

类似于(10)式的推导可知 $J_{1}<\infty$. 对 J_{2},由 C_{r} 不等式及Markov不等式,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha p}\Big(\sum_{j=1}^{n}EY_{nj}^{2}\Big)^{p/2} &= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha p}\Big[\sum_{j=1}^{n}(E|X_{nj}^{2}I_{(|X_{nj}|\leqslant n^{\alpha})}|+n^{2\alpha}P(|X_{nj}|>n^{\alpha}))\Big]^{p/2}\leqslant\\ & c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha p}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n}E|X_{nj}^{2}I_{(|X_{nj}|\leqslant n^{\alpha})}|^{p/2}+\Big(\sum_{j=1}^{n}n^{2\alpha}P(|X_{nj}|>n^{\alpha})\Big)^{p/2}\Big]\leqslant\\ & c\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{E|X_{nj}^{2}I_{(|X_{nj}|\leqslant n_{\alpha})}|}{n^{2\alpha}}\Big)^{p/2}+c\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}n^{-\alpha p}E|X_{nj}|^{p}\Big)^{p/2}\triangleq J_{3}+J_{4}.\end{aligned}$$

显然 $J_{4}<\infty$. 而 $J_{3}\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-2\alpha)p/2}(EX^{2})^{p/2}=c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1+p/2)}<\infty$. 综上可知,(9)式成立.

定理5 设 $\{X_{nj},1\leqslant j\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 为零均值的行间NA阵列. 设存在随机变量 X,对某个 $p\geqslant 2$,有 $E|X|^{p}<\infty$,且 $EX^{2}<\infty$. 若对 $\forall x>0$,有 $P(|X_{nj}|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x)$,则对 $S_{nn}=\sum_{j=1}^{n}X_{nj}$,有 $\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_{nk}|\geqslant \varepsilon n^{\alpha})<\infty$,其中 $\alpha=1/2+2/p$.

证明 令 $Y_{j}(n)=X_{nj}I_{(|X_{nj}|\leqslant n^{\alpha})}+n^{\alpha}I_{(X_{nj}>n^{\alpha})}-n^{\alpha}I_{(X_{nj}<-n^{\alpha})}\cdot T_{m}=\sum_{j=1}^{m}Y_{j}(n),1\leqslant m\leqslant n.$

$$\begin{aligned}|ET_{m}|/n^{\alpha} &\leqslant n^{-\alpha}\sum_{j=1}^{m}|E(X_{nj}-Y_{j}(n))|\leqslant n^{-\alpha}\sum_{j=1}^{m}(E|X_{nj}|I_{(|X_{nj}|\leqslant n^{\alpha})}+n^{\alpha}P(X_{nj}>n^{\alpha}))\leqslant\\ & n^{-\alpha}\sum_{j=1}^{m}(n^{\alpha}n^{-\alpha p}E|X|^{p}+n^{-\alpha(p-1)}E|X|^{p})=2\sum_{j=1}^{m}n^{-\alpha p}E|X|^{p}.\end{aligned}$$

故

$$\max_{1\leqslant m\leqslant n}|ET_{m}|/n^{\alpha}\leqslant 2n^{1-\alpha p}E|X|^{p}\to 0\qquad n\to\infty. \tag{11}$$

记 $A_{n}=\bigcup_{j=1}^{n}(|X_{nj}|\leqslant \varepsilon n^{\alpha})$, $B_{n}=\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n}((X_{ni}>n^{\alpha},X_{nj}>n^{\alpha})\cup(X_{ni}<-n^{\alpha},X_{nj}<-n^{\alpha}))$, $C_{n}=(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|T_{m}|\geqslant 2\varepsilon n^{\alpha})$. 则对充分大的 n,有 $(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_{nk}|\geqslant 4\varepsilon n^{\alpha})\subset A_{n}\cup B_{n}\cup C_{n}$. 由Markov不等式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_{n})\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}P(|X_{nj}|\geqslant \varepsilon n^{\alpha})\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}P(|X|\geqslant \varepsilon n^{\alpha})\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\alpha p}E|X|^{p}<\infty. \tag{12}$$

由 $\{X_{nj},1\leqslant j\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 的NA性可知,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}P(B_{n}) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(P(X_{ni}>n^{\alpha})P(X_{nj}>n^{\alpha})+P(X_{ni}<-n^{\alpha})P(X_{nj}<-n^{\alpha}))\leqslant\\ & 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(|X_{ni}|>n^{\alpha})P(|X_{nj}|>n^{\alpha})\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}P(|X|>n^{\alpha})\leqslant\\ & 2\sum_{n=1}^{\infty}n^{2(1-\alpha p)}(E|X|^{p})^{2}<\infty.\end{aligned} \tag{13}$$

当 n 充分大时,由(11)式可知 $P(C_{n})\leqslant P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|T_{m}-ET_{m}|\geqslant \varepsilon n^{\alpha})$. 令 $\beta_{p}=:\sup_{n,j}E|Y_{j}(n)-EY_{j}(n)|^{p}$

$<\infty$, $p \ge 2$, $B_2 =: \sup_{n,j} E|Y_j(n) - EY_j(n)|^2 < \infty$. 则由Markov不等式及(3)式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\max_{1\le m\le n} |T_m - ET_m| \ge \varepsilon n^{\alpha}) \le c n^{-\alpha p} E(\max_{1\le m\le n}|T_m - ET_m|)^p < \infty. \tag{14}$$

由(12)至(14)式可知结论成立.

定理6　设$\{X_{nj}, 1\le j\le n, n\ge 1\}$是行间NA阵列. 设对某个$p\ge 2$, 有$B_p =: \sup_{n,j} E|X_{nj}|^p<\infty$, 对任意自然数$a, n$, 有$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-a} P(|X_{n,a+j}| < n^{1/2+2/p}) < \infty$. 记$S_{a,k}^{(n)} = \sum_{j=0}^{k-a} X_{n,a+j}$, $1\le k\le n$, 则$S_{a,n}^{(n)}/n^{1/2+2/p} \to 0$, a.s.

证明　记$X'_{n,a+j} = X_{n,a+j} I_{(|X_{n,a+j}|<n^{1/2+2/p})}$, $S'^{(n)}_{a,k} = \sum_{j=0}^{k-a} X'_{n,a+j}$, $1\le k\le n$. 由Markov不等式可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\bigcup_{j=0}^{n-a}(X_{n,a+j}\ne X'_{n,a+j})\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} P(|X_{n,a+j}|>n^{1/2+2/p}) \le$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} n^{-(1/2+2/p)p}E|X_{n,a+j}|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+2)/2} B_p < \infty.$$

由Borel-Cantelli引理可知$S^{(n)}_{a,n}$与$S'^{(n)}_{a,n}$在极限意义下是一致的, 故这里只需证明$n^{-(1/2+2/p)}S'^{(n)}_{a,n}\to 0$, a.s. 由Kronecker引理可知, 需证明下面两式成立:

$$\sum_{j=0}^{n-1} n^{-(1/2+2/p)} EX'_{n,a+j}\to 0,$$
$$\sum_{j=0}^{n-1} n^{-(1/2+2/p)}(X'_{n,a+j}-EX'_{n,a+j})\to 0,\ \text{a.s.} \tag{15}$$

而$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-a} n^{-(1/2+2/p)}EX'_{n,a+j}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-a}P(|X_{n,a+j}|<n^{1/2+2/p})<\infty$. 令$\tilde X_{n,a+j} = X'_{n,a+j}-EX'_{n,a+j}$, $\tilde S^{(n)}_{a,k} = \sum_{j=0}^{k-a}\tilde X_{n,a+j}$, $\tilde B_p =: \sup_{n,j}E|\tilde X_{n,a+j}|^p<\infty$. 欲证(15)式, 只需证明对$\forall\varepsilon>0$, $P(\sup_{m\le i\le n,n\ge 1}|i^{-(1/2+2/p)}\tilde S^{(n)}_{a,i}|\ge\varepsilon)\to 0$, $m\to\infty$. 而

$$P(\sup_{m\le i\le n,n\ge 1}|i^{-(1/2+2/p)}\tilde S^{(n)}_{a,i}|\ge\varepsilon) = \lim_{n\to\infty}P(\max_{m\le i\le n}|i^{-(1/2+2/p)}\tilde S^{(n)}_{a,i}|\ge\varepsilon)\le\lim_{n\to\infty}P(\max_{1\le i\le n}|\tilde S^{(n)}_{a,i}|\ge\varepsilon n^{1/2+2/p})\le$$
$$c\lim_{n\to\infty}n^{-(1/2+2/p)p}E(\max_{1\le i\le n}|\tilde S^{(n)}_{a,i}|)^p \le c\lim_{n\to\infty}n^{-2}\tilde B_p = 0.$$

由Kronecker引理可知, $\lim_{m\to\infty}P(\sup_{m\le i\le n,n\ge 1}|i^{-(1/2+2/p)}\tilde S^{(n)}_{a,i}|\ge\varepsilon) = 0$. 从而有$S^{(n)}_{a,n}/n^{1/2+2/p}\to 0$, a.s.

参考文献:

[1] K JOAG-DEV F PROSCHAN. Negative Association of Variables with Applications [J]. Ann. Statist, 1983, 11: 286-295.

[2] 苏　醇, 赵林城, 王岳宝. NA序列的矩不等式与弱收敛 [J]. 中国科学, 1996, 26A(2): 1 091-1 099.

[3] 王洪春. NA序列的大数定律 [J]. 重庆师范学院学报, 2002, 19(2): 14-16.

[4] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

Convergence of NA Random Matric Sequences

ZHANG Li-wei, YANG Xin-jian

(College of Mathematics & Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: The author establishs a probability inequatility and a series of moment inequatilities for NA random matric sequences, and convergence in propability, complete convergence and almost sure convergence are studied.

Key words: NA random matric sequences; convergence in propability; complete convergence; almost sure convergence

(责任编辑　向阳洁)