第 27 卷　第 1 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 1
2006 年 1 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jan. 2006

文章编号: 1007- 2985(2006)01- 0008- 01

群论的一个整除问题

乐茂华

(湛江师范学院数学系, 广东 湛江　524048)

摘　要: 设 p 是大于 3 的奇素数, 证明了: 如果 $p^2 + p + 1$ 整除 $(3^p - 1)\ (3 - 1)$, 则 $p \quad 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ 且 $p^2 + p + 1$ 是素数.

关键词: 整除; 素数; 群论

中图分类号: O156　　文献标识码: A

在群论中, Feit 和 Thompson 证明了任何奇阶群都是可解群. 此后, Parker 发现: 若对于任何不同的奇素数 p 和 q 都能证明整数 $(q^p - 1)\ (q - 1)$ 不能整除 $(p^q - 1)\ (p - 1)$, 则 Feit 和 Thompson 有关上述重要结果的证明可以大大简化. 这是数论中一个迄今未能解决的难题[1]. 对此, McKay 利用计算机证明了: 当 $p < 5.3 \quad 10^7$ 时, $p^2 + p + 1$ 不能整除 $(3^p - 1)\ (3 - 1)$. 笔者运用初等数论方法得到了上述整除关系成立的一个必要条件.

定理 1　如果大于 3 的奇素数 p 可使 $p^2 + p + 1$ 整除 $(3^p - 1)\ (3 - 1)$, 则必有 $p \quad 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ 且 $p^2 + p + 1$ 是素数.

证明　设 p 是可使 $p^2 + p + 1$ 整除 $(3^p - 1)\ (3 - 1)$ 的奇素数. 从文献[2] 可知, $(3^p - 1)\ (3 - 1)$ 的素因数都是 $2kp + 1$ 的形式, 其中 k 是正整数. 假如 $p^2 + p + 1$ 不是素数, 则从上述结果可得 $p^2 + p + 1 \quad (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 > p^2 + p + 1$ 这一矛盾. 因此, $p^2 + p + 1$ 必为素数.

由于 p 是大于 3 的奇素数, 故有 $p \quad 1$ 或 $2 \ (\mathrm{mod}\ 3)$. 当 $p \quad 1 \ (\mathrm{mod}\ 3)$ 时, $p^2 + p + 1 \quad 3 \ (\mathrm{mod}\ 3)$. 然而, 因为已知 $p^2 + p + 1$ 是素数, 所以这是不可能的, 故必有

$$p \quad 2 \ (\mathrm{mod}\ 3). \tag{1}$$

另外, 当 $p^2 + p + 1$ 整除 $(3^p - 1)\ (3 - 1)$ 时, 同余关系

$$3^p \quad 1 \ (\mathrm{mod}\ p^2 + p + 1) \tag{2}$$

成立. 从(2) 式可知

$$\left(\frac{3}{p^2 + p + 1}\right) = 1, \tag{3}$$

其中 $\left(\frac{3}{p^2 + p + 1}\right)$ 是 Legendre 符号. 根据文献[3], 从(3) 式可得

$$p^2 + p + 1 \quad 1 \ (\mathrm{mod}\ 12). \tag{4}$$

结合(1), (4) 式可知, $p^2 + p + 1 \quad 1 \ (\mathrm{mod}\ 12)$, 由此可得 $p \quad 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$. 于是从(1) 式可知 $p \quad 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$. 证毕.

参考文献:

[1] GUY P K. Unsolved Problems in Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.

[2] BIRKHOFF G D, VANDIVER H S. On the Integral Divisors of $a^n - b^n$ [J]. Ann. of Math., 1904, 5(2): 173- 180.

[3] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

Divisibility Concerning Group Theory

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong China)

Abstract: Let p be an odd prime with $p > 3$. It is proved that if $p^2 + p + 1$ divides $(3^p - 1)\ (3 - 1)$, then $p \quad 11 \ (\mathrm{mod}\ 12)$ and $p^2 + p + 1$ is a prime.

Key words: divisibility; prime; group theory

(责任编辑　向阳洁)

收稿日期: 2005- 05- 20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271104); 广东省自然科学基金资助项目(011781); 广东省教育厅自然科学研究项目(0161)

作者简介: 乐茂华(1952-), 男, 上海市人, 湛江师范学院数学系教授, 主要从事数论研究.