第 28卷　第 6期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 6
2007年 11月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Nov. 2007

文章编号: 1007- 2985(2007)06- 0009- 02

Dirichlet L- 函数的一次加权均值*

高　丽[1], 马鹏飞[2]
(1. 延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安　716000; 2. 绥德县第一中学, 陕西 绥德　718000)

摘　要: 利用 Gauss 和的定义、三角和估计及其解析方法, 研究了 Dirichlet L- 函数倒数的一次加权均值分布, 得到一个有趣的加权均值分布的渐近公式.

关键词: Dirichlet L- 函数; Gauss 和; 加权均值; 渐近公式
中图分类号: O156. 4　　文献标识码: A

1　主要结论

设 q 为正整数, χ 为模 q 的 Dirichlet 特征, $L(1,\chi)$ 是对应于特征 χ 的 Dirichlet L- 函数. 对任意的整数 m, Gauss 和 $G(m,\chi)$ 定义如下[1-3]:

$$G(m,\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)\,e\left(\frac{ma}{q}\right),$$

其中 $e(y)=e^{2\pi iy}$.

关于 Gauss 和 $G(m,\chi)$ 的性质, 许多数论书中都有研究. 然而笔者认为它的最重要的性质是: 当 $(m,q)=1$, 且 χ 为模 q 的原特征时, 有 $G(m,\chi)=\sqrt{q}$. 但是对于非原特征 χ, $|G(m,\chi)|$ 的值变化较大, 也就是说对不同的特征 χ, $|G(m,\chi)|$ 的值的分布很不规则. 然而在许多加权均值中, $|G(m,\chi)|$ 确又表现出良好的值的分布性质, 笔者就是为了说明这一点. 为此, 设实数 $Q>1$, 整数 $q\leqslant Q$, 利用 Gauss 和的定义、三角和估计及其解析方法, 讨论了 Dirichlet L- 函数倒数的一次加权均值, 得到如下加权均值分布的渐近公式:

定理 1　设实数 $Q>2$, 整数 $q\leqslant Q$, 对任意的整数 m, 当 $(m,q)=1$ 时, 有加权均值分布公式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{L(1,\chi)}=Q+O(\ln^2 Q),$$

其中 $\varphi(q)$ 为 Euler 函数, ε 为任意固定的正数.

2　主要引理

为了完成定理 1 的证明, 先引入下面几个主要的引理.

引理 1[4]　设实数 $Q>1$, 整数 $q\leqslant Q$, $L(1,\chi)$ 是 Dirichlet L- 函数, 则有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{1}{L(1,\chi)}=Q+O(\ln^2 Q).$$

引理 2[5]　设 m 及 q 为整数, 且 $q\geqslant 2$, 则有三角和估计式

$$\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}e\left(\frac{ma}{q}\right)\leqslant\sum_{d\mid(m,q)}d,$$

其中 $\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}$ 表示对所有满足 $(a,q)=1$, 且 $1\leqslant a\leqslant q$ 的 a 求和, $e(y)=e^{2\pi iy}$.

引理 3[4]　设实数 $Q>1$, $y\geqslant 2$, 则有估计式

$$\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,x\\ x\leqslant y}}\left|\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a(q)}}\mu(n)\right|\ll y(\ln y)^{-4}+y^{\frac{1}{2}}Q(\ln(yQ))^4,$$

* 收稿日期: 2007- 07- 16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271093); 陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)
作者简介: 高　丽(1966-), 女, 陕西绥德人, 延安大学数学与计算机科学学院教授, 硕士, 主要从事解析数论研究.

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数.

引理4 设实数 $Q>2$, 整数 $q\leqslant Q$, χ 为模 q 的 Dirichlet 特征, 则有如下估计式:

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}d\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\left|\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{L(1,\chi)}\right|=O(\ln^2 Q).$$

证明 为书写方便, 记 $A(\chi,y)=\sum_{q<n\leqslant y}\chi(n)\mu(n)$, 则由 Dirichlet $L-$ 函数的定义与 Abel 恒等式, 得[6]

$$\frac{1}{L(1,\chi)}=\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n}+\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y,$$

$$\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{L(1,\chi)}=\sum_{\chi \bmod q}\chi(rd+1)\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\bar\chi(n)\mu(n)}{n}+\int_q^{+\infty}\frac{A(\bar\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)=\sum_{\chi \bmod q}\chi(rd+1)\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\bar\chi(n)\mu(n)}{n}\Big)+$$

$$\sum_{\chi \bmod q}\chi(rd+1)\Big(\int_q^{+\infty}\frac{A(\bar\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)=\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\mu(n)}{n}\sum_{\chi \bmod q}\chi(rd+1)\bar\chi(n)+$$

$$\int_q^{+\infty}\frac{1}{y^2}\Big(\sum_{q\leqslant n\leqslant y}\mu(n)\sum_{\chi \bmod q}\chi(rd+1)\bar\chi(n)\Big)\mathrm{d}y.$$

由此再利用特征和的正交性与引理3, 即得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}d\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\left|\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{L(1,\chi)}\right|\leqslant\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d\mid q}d\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant q\\ n\equiv rd+1(q)}}\left|\frac{\mu(n)}{n}\right|+$$

$$\int_q^{+\infty}\frac{1}{y^2}\Big|\sum_{\substack{q\leqslant n\leqslant y\\ n\equiv rd+1(q)}}\mu(n)\Big|\mathrm{d}y\Big)\ll\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d\mid q}d\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\frac{1}{rd+1}+$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d\mid q}d\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\int_q^{+\infty}\frac{1}{y^2}\Big|\sum_{q\leqslant n\leqslant y}\mu(n)\Big|\mathrm{d}y\ll\ln^2 Q.$$

3 定理1的证明

由 Gauss 和的定义及以上引理可知, 当 $(m,q)=1$ 时, 有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{L(1,\chi)}=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\Big(\frac{(a-b)m}{q}\Big)\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(a\bar b)}{L(1,\chi)}=$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{1}{L(1,\chi)}+\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=2}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\Big(\frac{mb(a-1)}{q}\Big)\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(a)}{L(1,\chi)}=$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{1}{L(1,\chi)}+O\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}d\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\Big|\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{L(1,\chi)}\Big|\Big)=$$

$$Q+O(\ln^2 Q).$$

参考文献:

[1] TOM M APOSTOL. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[2] DAVENPORT H. Multiplicative Number Theory [M]. Markham, 1967.

[3] TOM M APOSTOL. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] 张文鹏. Dirichlet $L-$ 函数的倒数的 $2k$ 次均值公式 [J]. 数学年刊, 1993, 14A(1): 1-5.

[5] 易 媛, 张文鹏. 关于 Dirichlet $L-$ 函数的一次加权均值 [J]. 系统科学与数学, 2000, 20(3): 346-351.

[6] VAUGHAN R C. An Elementary Method in Prime Number Theory [J]. Recent Progress in Analytic Number Theory, Academic Press, 1981, 1: 341-347.

On the First Power Weighted Mean of the Dirichlet L-Functions

GAO Li[1], MA Peng-fei[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shannxi China;

2. No. 1 Middle School of Suide, Suide 718000, Shannxi China)

Abstract: The first power weighted mean of Dirichlet L-functions and the asymptotic formula of a mean value are presented using the definition of Gauss sum, the estimation of trigonometric sum and the analytic methods.

Key words: Dirichlet L-function; Gauss sum; weighted mean; asymptotic formula (责任编辑 向阳洁)