第 28 卷　第 2 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 2
2007 年 3 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Mar. 2007

文章编号: 1007- 2985(2007)02- 0028- 02

图的坚韧度与图的 Laplacian 特征值的关系*

毛俊超[1], 冯立华[2], 沈秀专[3]

(1. 中国海洋大学数学系, 山东 青岛　266071; 2. 山东工商学院数学学院, 山东 烟台　264005;
3. 青岛科技大学数理学院, 山东 青岛　266061)

摘　要: 利用简单无向图中的特殊顶点集与图的 Laplacian 谱的关系, 得到了有关图的坚韧度与 Laplacian 谱的一个有趣的关系式.

关键词: 图; 坚韧度; Laplacian 谱

中图分类号: O157.5　　文献标识码: A

主要研究简单无向图. 设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向图, 其顶点集与边集分别为 V 和 E. 对任意的 $v \in V$, 点 v 的度表示为 d_v. G 的度序列记为 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, 其中最大度为 $\Delta = d_1$, 最小度为 $\delta = d_n$. 若点 v 的平均 2- 度表示为 $m_v = (\sum_{uv \in E(G)} d_u) / d_v$, 则称 $d_v m_v$ 是 v 的 2- 度. 对于 2 个点 u 和 v, 用 $u \sim v$ 表示这 2 个点是相邻的.

图 G 的邻接矩阵定义为 $\boldsymbol{A}(G) = (a_{ij})$, 这里当 $ij \in E(G)$ 时 $a_{ij} = 1$, 其他情况下 $a_{ij} = 0$.

图 G 的特征多项式为 $P_G(x) = \det(xI - \boldsymbol{A}(G))$. G 的特征值就是 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值, 记为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, 其中 $\boldsymbol{A}(G)$ 的最大特征值称为 G 的谱半径, 表示为 $\rho(G) = \max\{|\lambda_i| : i = 1, 2, \cdots, n\}$.

令 $\boldsymbol{D}(G)$ 是 G 的度对角矩阵, 则称 $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ 为 G 的 Laplacian 矩阵, 而称矩阵 $\boldsymbol{Q}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ 为 G 的 Q- 矩阵. $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值称为 G 的 Laplacian 矩阵的特征值, 记为 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n = 0$. 用 $\sigma(G)$ 表示 $\boldsymbol{Q}(G)$ 的最大特征值, 并称为 G 的 Q- 谱半径.

图 G 的坚韧度 $t(G)$ 是一个最大的实数 t, 使得对于任意的正整数 $x \geqslant 2$, 在 G 中至少要去掉 tx 个点才能使得剩余部分的导出子图含有 x 个连通分支. 换言之, 对于一个点子集 $S \subset V$, 用 $c(S)$ 表示 S 的导出子图中的连通分支的数目, 则 $t(G) = \min\{\frac{|Z|}{c(V - Z)} : \forall Z \subset V\}$. 称一个图 G 是 t- 坚韧的, 若 $t(G) \geqslant t$. 这个参数是由 Chvatal V[1] 为了研究图的 Hamiltonian 性质而引入的.

对于图论中其他概念见文献[2- 3] 中的描述.

引理 1[4]　假设一个图 G 具有 n 个顶点, 平均度为 d, 其所有的 Laplacian 特征值为 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n = 0$. 若对于 $i \neq n$, 它的 Laplacian 谱满足 $|d - \mu_i| \leqslant \theta$, 则对于 G 的任意 2 个点不相交的点子集 X, Y, 其中一个点在 X 中, 另一个点在 Y 中的边数目 $e(X, Y)$ 满足

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leqslant \frac{\theta}{n} \sqrt{|X| (n - |x|) |Y| (n - |Y|)}.$$

若用 $d' = \frac{\mu_1 + \mu_{n-1}}{2}$ 代替 d, 则可得到以下推论:

* 收稿日期: 2006- 09- 25
作者简介: 毛俊超(1976-), 男, 山东临沂人, 中国海洋大学数学系助理讲师, 硕士, 主要从事组合数学、图论研究.

推论1　G 如上所述,对于 G 的任意2个点不相交的点子集 X, Y,若 $e(X, Y) = 0$,则

$$\frac{|X||Y|}{(n-|X|)(n-|Y|)} \leqslant \left(\frac{\mu_1-\mu_{n-1}}{\mu_1+\mu_{n-1}}\right)^2.$$

定理1　令 $G=(V, E)$ 是 n 个顶点的图,其所有的 Laplacian 特征值为 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n = 0$,则 G 的坚韧度 $t = t(G)$ 满足 $t > \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_{n-1}}{\mu_1-\mu_{n-1}}$.

证明　设 W 是满足坚韧度定义的一个子集,且 $G-W$ 有 x 个连通分支,则 $t=\frac{|W|}{x}$. 设 $G-W$ 的 x 个连通分支为 $C_1, C_2, \cdots, C_x$,其中 $|C_1| \leqslant |C_2| \leqslant \cdots \leqslant |C_x|$.

令 $A=\bigcup\limits_{i\leqslant[\frac{x}{2}]} C_i, B=\bigcup\limits_{i\geqslant[\frac{x}{2}]} C_i$. 设 $|A|=y$,则 $|B| \geqslant |A| = y \geqslant \frac{x}{2}$. 令 $\xi=\frac{\mu_1-\mu_{n-1}}{\mu_1+\mu_{n-1}}$,由推论1有

$$y^2 \leqslant |A||B| \leqslant (n-|X|)(n-|Y|)\left(\frac{\mu_1-\mu_{n-1}}{\mu_1+\mu_{n-1}}\right)^2 \geqslant \xi^2(n-|y|)^2.$$

因此 $y \leqslant \xi(n-|Y|)$,即 $y \leqslant \frac{n}{1+\frac{1}{\xi}}$.

因为 $|A| = y \geqslant [\frac{x}{2}] \geqslant [\frac{x}{3}]$,所以 $|W| = tx \leqslant 3ty$,故 $|B| = n-|A|-|W| \geqslant n-y-3ty = n-(3t+1)y$,即 $n-|B| \leqslant (3t+1)y$.

由推论1得,$y(n-(3t+1)y) \leqslant |A||B| \leqslant \xi^2(n-y)(3t+1)y$. 推出 $n-(3t+1)y \leqslant \xi^2(n-y)(3t+1)$,即 $(1-\xi^2)(3t+1)y \geqslant n-n\xi^2(3t+1)$. 因为 $y \leqslant \frac{n}{1+\frac{1}{\xi}}$,所以 $(1-\xi^2)(3t+1)\frac{n}{1+\frac{1}{\xi}} \geqslant n-n\xi^2(3t+1)$. 化简后得到 $3t+1 \geqslant \frac{1}{\xi}$. 这就得到了结论.

参考文献:

[1] CHVATAL V. Tough Graphs and Circuits [J]. Discrete Math., 1973, (5): 215-218.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York: North Holland, 1976.

[3] CVETKOVIC D M, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graghs [M]. New York: Academic Press, 1980.

[4] CHUNG F R K. Discrete Isoperimetric Inequalities, Differential Geometry IX [M]. International Press, 2004.

Relation Between Toughness and Laplacian Eigenvalues of Graphs

MAO Jun-chao[1], FENG Li-hua[2], SHEN Xiu-Zhuan[3]

(1. Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao 266071, Shandong China; 2. College of Mathematics, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, Shandong China; 3. Number College of Science, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, Shandong China)

Abstract: By studying the relation between the vertex set of a simple undirected graph and the Laplacian eigenvalues, the authors obtain an interesting inequality of toughness and Laplacian eigenvalues of graphs.

Key words: graph; toughness; Laplacian eigenvalues

(责任编辑　向阳洁)