文章编号: 1007- 2985(2007)02- 0001- 02

# 关于 $k$ 重 $S$- 完全数*

乐 茂华
(湛江师范学院数学系, 广东 湛江　524048)

摘　要: 对于正整数 $n$, 设 $S(n)$ 是 Smarandache 函数, $f(n) = \sum_{d \mid n} S(d)$. 对于正整数 $k$, 若 $n$ 适合 $f(n) = kn$, 则称 $n$ 是一个 $k$ 重 $S$- 完全数. 证明了: 当 $k > 2$ 时, 不存在 $k$ 重 $S$- 完全数.

关键词: Smarandache 函数; $k$ 重 $S$- 完全数; 存在性
中图分类号: O156　　文献标识码: A

设 $\mathbf{Z}^+$ 是全体正整数的集合. 对于正整数 $n$, 设 $S(n)$ 是 $n$ 的 Smarandache 函数, 它等于适合 $n \mid t!$ 的最小正整数 $t$. 设 $k$ 是正整数. 若正整数 $n$ 满足

$$\sum_{d \mid n} S(d) = kn, \tag{1}$$

则称 $n$ 是一个 $k$ 重 $S$- 完全数, 1 重 $S$- 完全数简称 $S$- 完全数. 对此, Sándor J[1] 讨论了某些特殊类型的 $S$- 完全数.

引理 1　若

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \tag{2}$$

是 $n$ 的标准分解式, 则

$$S(n) = \max(S(p_1^{r_1}), S(p_2^{r_2}), \cdots, S(p_k^{r_k})).$$

证明过程参见文献[2].

引理 2　对于素数 $p$ 和正整数 $r$, 必有 $S(p^r) \leqslant pr$.

证明过程参见文献[2].

引理 3　设 $d(n)$ 是 $n$ 的不同约数的个数, 此时, $d(n)$ 是积性函数. 若(2) 式是 $n$ 的标准分解式, 则

$$d(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1)\cdots(r_k + 1).$$

证明过程参见文献[3] 的第 6.1 节和第 6.4 节.

定理 1　当 $k > 2$ 时, 不存在 $k$ 重 $S$- 完全数.

证明　设

$$f(n) = \sum_{d \mid n} S(d), \tag{3}$$

又设 $n$ 是一个 $k$ 重 $S$- 完全数. 从(1), (3) 式可知 $n$ 满足

$$f(n) = kn. \tag{4}$$

当 $k > 2$ 时, 由于 $f(1) = 1$, 故从(4) 式可知 $n > 1$.

* 收稿日期: 2006- 09- 01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271104); 广东省自然科学基金资助项目(04011425)
作者简介: 乐茂华(1952- ), 男, 上海市人, 湛江师范学院数学系教授, 主要从事数论研究.

设(2)式是 $n$ 的标准分解式.由引理1可知

$$S(n)=S(p^r),\tag{5}$$

其中

$$p=p_j,r=r_j\qquad 1\leqslant j\leqslant k.\tag{6}$$

从(2),(6)式可得

$$n=p^rm\qquad m\in\mathbf{Z}^+,\gcd(p^r,m)=1.\tag{7}$$

同时,因为由(5)式可知

$$S(p^r)!\equiv 0(\bmod n),$$

所以对 $n$ 的任何约数 $d$ 都有

$$S(p^r)\geqslant S(d).\tag{8}$$

由于 $S(1)=1$,而且当 $d>1$ 时 $S(d)>1$,故从(3),(8)式可得

$$d(n)S(p^r)>kn\geqslant 3n,\tag{9}$$

其中 $d(n)$ 是 $n$ 的不同约数的个数.

由引理3,从(7)式可知

$$d(n)=d(p^r)d(m)=(r+1)d(m).\tag{10}$$

将(7),(10)式代入(9)式即得

$$\frac{(r+1)S(p^r)}{p^r}>3\frac{m}{d(m)}.\tag{11}$$

根据 $d(m)$ 的定义可知

$$m\geqslant d(m).\tag{12}$$

又由引理2可知

$$S(p^r)\leqslant pr.\tag{13}$$

将(12),(13)式代入(11)式可得

$$r(r+1)>3p^{r-1}.\tag{14}$$

当 $r=1$ 时,从(14)式可得 $2>3$ 这一矛盾.当 $r=2$ 或3时,从(14)式都可得 $2>p$ 这一矛盾.当 $r\geqslant 4$ 时,因为 $2^r\geqslant r^2$ 且 $2^{r-1}>r$,所以从(14)式可得

$$r(r+1)>3p^{r-1}\geqslant 3\cdot 2^{r-1}=2^r+2^{r-1}>r^2+r$$

这一矛盾.综上所述,当 $k>2$ 时,不存在 $k$ 重 $S-$ 完全数.证毕.

参考文献:

[1] SÁNDOR J. On Completely $f$-Perfect Numbers [J]. Scientia. Magna., 2005, 1(2): 116-119.

[2] FARRIS M, MITCHELL P. Bounding the Smarandache Function [J]. Smarandache Notions J., 2002, 13: 37-42.

[3] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.

# On the $k$ Fold $S$-Perfect Numbers

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong China)

**Abstract**: For any positive integer $n$, let $S(n)$ denote the Smarandache function of $n$. Further let $f(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$. For a fixed positive integer $k$, if $n$ satisfies $f(n)=kn$, then $n$ is called a $k$ fold $S$-perfect number. It is proved that if $k>2$, then there is no $k$ fold $S$-prefect number.

**Key words**: Smarandache function; $k$ fold $S$-perfect number; existence

(责任编辑 向阳洁)