第 27 卷　第 2 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 2
2006 年 3 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Mar. 2006

文章编号: 1007- 2985(2006)02- 0001- 02

关于 Diophantine 方程 $X^2+Y^2=Z^r$ 的素数解

乐 茂华
(湛江师范学院数学系, 广东 湛江　524048)

摘　要: 设 r 是大于 1 的奇数, 给出了方程 $X^2+Y^2=Z^r$ 的正整数解 (X, Y, Z) 中 Y 为奇素数方幂的必要条件.
关键词: 高次 Diophantine 方程; 素数解; 必要条件
中图分类号: O156　　文献标识码: A

设 $\mathbf{Z}^+$ 是全体正整数的集合, a, b, c 是大于 1 且两两互素的正整数, 则方程

$$a^x+b^y=c^z \qquad x, y, z \in \mathbf{Z}^+ \tag{1}$$

是一类基本的且重要的指数丢番图方程. 1933 年, Mahler K[1] 运用 p-adic 形式的丢番图逼近方法, 证明了方程(1) 仅有有限多组解 (x, y, z). 1940 年, Gel fond A O[2] 运用超越数论方法给出了解的可有效计算的上界. 1994 年, Terai N[3] 对于方程(1) 的解数提出了以下猜想:

猜想 1　若方程(1) 有解 $(x, y, z)=(p, q, r)$ 适合 $\min(p, q, r)>1$, 则方程(1) 仅有解 $(x, y, z)=(p, q, r)$.

1999 年, 曹珍富[4] 给出了猜想 1 的反例, 并据此提出该猜想应改为:

猜想 2　当 $\max(a, b, c)>7$ 时, 猜想 1 成立.

然而, 猜想 2 也有无穷多个反例. 如当 $a=2, b=2^n-1, c=2^n+1$, 其中 n 是任何大于 2 的正整数时, a, b, c 是满足 $\max(a, b, c)>7$ 的正整数, 而且方程(1) 有解 $(x, y, z)=(n+2, 2, 2)$ 适合 $\min(x, y, z)>1$, 但是方程(1) 还有另一组解 $(x, y, z)=(1, 1, 1)$. 因此, 乐茂华[5] 建议将猜想 1 改为以下形式:

猜想 3　方程(1) 至多有 1 组解 (x, y, z) 适合 $\min(x, y, z)>1$.

目前, 有关方程(1) 的解数的已知结果都支持猜想 3, 但这仍是一个远未解决的问题.

设 r 是大于 1 的奇数. 目前, 有关猜想 3 的很多结果都是在假定方程(1) 有解 $(x, y, z)=(2, 2, r)$ 且 b 是奇素数方幂的条件下得到的(参见文献[5] 及其参考文献). 由此产生了以下问题: 哪些正整数组 (a, b, c) 适合这一条件呢? 笔者将给出该问题的一个必要条件.

首先, 从文献[5] 的引理 2.2 可知, 方程(1) 有解 $(x, y, z)=(2, 2, r)$ 且使 b 为奇数的充要条件是 a, b, c 满足

$$\begin{cases} a=m\left|\sum_{k=0}^{(r-1)/2}(-1)^k\binom{r}{2j}m^{r-2k-1}n^{2k}\right|, \\ b=n\left|\sum_{k=0}^{(r-1)/2}(-1)^k\binom{r}{2j+r}m^{r-2k-1}n^{2k}\right|, \\ c=m^2+n^2, \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2005- 05- 20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271104); 广东省自然科学基金资助项目(011781); 广东省教育厅科学研究项目(0161)
作者简介: 乐茂华(1952-), 男, 上海市人, 湛江师范学院数学系教授, 主要从事数论研究.

其中 m, n **N**, $\gcd(m, n) = 1$, m $0 \pmod 2$. 设 $= 2+\sqrt{3}$, $= 2-\sqrt{3}$. 对于正整数 t, 设

$$U(t) = \frac{1}{2}({}^{t} + {}^{t}), V(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}({}^{t} - {}^{t}). \tag{3}$$

定理1 如果方程(1)有解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 且 b 是奇素数方幂, 则 a, b, c 必定满足下列条件之一:

( ) $r = 3, (a, b, c) = (46, 9, 13)$;

( ) $r = 3, a = V(2^s)(8(V(2^s))^2 + 3), b = U(2^s), c = 4(V(2^s))^2 + 1$, 其中 s 是正整数;

( ) a, b, c 满足方程组(2) 且 $n = 1$.

证明 当 b 是奇素数方幂时, $b = p^t$, 其中 p 是奇素数, t 是正整数. 此时, 从方程组(2) 可知 $n = p^l$, 0 l t.

若 $l = 0$, 则 $n = 1$ 且 a, b, c 满足条件( ).

若 $l > 0$, 则从方程组(2) 可知某个 Lucas 数没有本原素因数, 故从文献[6- 7] 可知 $r = 3$. 此时, 从方程组(2) 可得

$$a = m|m^2 - 3n^2|, b = n|3m^2 - n^2|, c = m^2 + n^2. \tag{4}$$

当 $\gcd(n, 3m^2 - n^2) = 1$ 时, 因为 $l > 0$, 所以从(4) 式可得 $n = b$ 以及

$$n^2 - 3m^2 = 1. \tag{5}$$

根据文献[8] 的定理 10.9.2, 从(5) 式即得条件( ). 当 $\gcd(n, 3m^2 - n^2) > 1$ 时, 由于 $\gcd(m, n) = 1$, 故有 $\gcd(n, 3m^2 - n^2) = 3$. 此时 $n = 3^l$, 而且

$$|3m^2 - 3^{2l}| = 3. \tag{6}$$

根据文献[9] 中的结果, 从(6) 式可得 $l = 1, m = 2$. 于是从(4) 式立得条件( ). 证毕.

参考文献:

[1] MAHLER K. Zur Approximation Algebraischer Zahln I: ber Den Gr ssten Primtailer bin rer Fomen [J]. Math. Ann., 1933, 107: 691- 730.

[2] GEL FOND A O. Sur la Divisibilit de la Diff rence Des Puissances de Deux Nombres Entiers Parune Puissance d un Id al Premier [J]. Mat. Sb., 1940, 7: 7- 25.

[3] TERAI N. The Diophantine Equation $a^x + b^y = c^z$ [J]. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1994, 70: 22- 26.

[4] CAO Z F. A Note on the Diophantine Equation $a^x + b^y = c^z$ [J]. Acta Arith., 1999, 91: 85- 93.

[5] 乐茂华. 关于指数丢番图方程 $a^x + b^y = c^z$ 的 Terai 猜想 [J]. 数学学报, 2003, 46(2): 245- 250.

[6] BILU Y, HANROT G, VOUTIER P M. Existence of Primitive Divisors of Lucas and Lehmer Numbers [J]. J. Reine Angew. Math., 2001, 539: 75- 122.

[7] VOUTIER P M. Primitive Divisors of Lucas and Lehmer Sequences [J]. Math. Comp., 1995, 64: 869- 888.

[8] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[9] KE Z. On the Diophantine Equation $x^2 = y^n + 1, xy$ 0 [J]. Sci. Sin., 1965, 14(3): 457- 460.

On the Prime Solutions of the Diophantine Equation $X^2 + Y^2 = Z^r$

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong China)

Abstract: Let r be an odd integer with $r > 1$. In this paper the author gives a necessary condition for (X, Y, Z) being a positive integer solution of the equation $X^2 + Y^2 = Z^r$ with Y being a power of an odd prime.

Key words: higher diophantine equation; prime solution; necessary condition

(责任编辑 向阳洁)