云南大学学报（自然科学版），2012，34（1）：9～14　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University　　http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

M－矩阵及非负矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的特征值界的估计[*1]

周　平，李耀堂
（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明　650091）

摘要：分别给出了非奇异 M－矩阵的逆矩阵和非奇异 M－矩阵的 Hadamard 积与非奇异 M－矩阵 Fan 积的最小特征值下界新的估计式；同时给出了非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界新的估计式；这些估计式都只依赖于矩阵的元素，易于计算. 算例表明，这些估计式在一定条件下改进了现有结果.

关键词：M－矩阵；非负矩阵；Hadamard 积；Fan 积；谱半径；最小特征值
中图分类号：O 151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2012)01－0009－06

M－矩阵是一类有着广泛应用背景的重要矩阵，生物、物理、数学和社会科学中的许多问题都与 M－矩阵有着密切的联系. 矩阵 Hadamard 积和 Fan 积是 2 种特殊的矩阵乘积[1-2]，它们被广泛地应用于概率论中特征函数和偏微方程中的弱极小原理等方面的研究. 受这些应用的刺激，非奇异 M－矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的最小特征值界的估计以及非负矩阵 Hadamard 积的谱半径界的估计成为矩阵理论研究的热点之一，并得到了一系列估计式[3,7-12]. 本文继续这些问题的研究，分别给出非奇异 M－矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 与非奇异 M－矩阵 B 的 Hadamard 积的最小特征值 $q(B\circ A^{-1})$ 及非奇异 M－矩阵 Fan 积的最小特征值 $q(A\star B)$ 下界新的估计式和非负矩阵 Hadamard 积的谱半径 $\rho(A\circ B)$ 上界新的估计式，这些估计式都只涉及矩阵 A 和 B 的元素，易于计算，而且在一定条件下新的估计式比现有估计式的估计更为精确.

1　预备知识

为叙述方便，先引入以下定义及符号.

用 $C^{n\times n}(R^{n\times n})$ 表示 $n\times n$ 阶复（实）矩阵所成的集合，$N=\{1,2,\cdots,n\}$. 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$. 若 A 可逆，记 $A^{-1}=(\beta_{ij})$，

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|,L_j=\sum_{k\neq j}|a_{kj}|,i,j\in N;r_{li}=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{lk}|},l\neq i,r_i=\max_{l\neq i}\{r_{li}\},i\in N.$$

$$|b_{i_1j}\beta_{i_1j}|\geqslant|b_{i_2j}\beta_{i_2j}|\geqslant\cdots\geqslant|b_{i_{n-1}j}\beta_{i_{n-1}j}|,i_t\neq j,j\in N;t=1,2,\cdots,n-1.$$

$$\frac{|b_{i_1j}|}{|a_{i_1j_1}|}L_j\geqslant\frac{|b_{i_2j}|}{|a_{i_2j_2}|}L_j\geqslant\cdots\geqslant\frac{|b_{i_{n-1}j}|}{|a_{i_{n-1}j_{n-1}}|}L_j,i_t\neq j,j\in N;t=1,2,\cdots,n-1.$$

$$|b_{i_1j}\beta_{i_1j}|\geqslant|b_{i_2j}\beta_{i_2j}|\geqslant\cdots\geqslant|b_{i_{n-1}j}\beta_{i_{n-1}j}|,i_t\neq j,j\in N;t=1,2,\cdots,n-1.$$

定义 1[2]　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若 $a_{ij}\geqslant 0(i,j\in N)$，则 A 称为非负矩阵，记为 $A\geqslant 0$.

定义 2[2]　记 $Z^{n\times n}=\{A=(a_{ij})\in R^{n\times n}\mid a_{ij}\leqslant 0;i,j\in N,i\neq j\}$，称 $Z^{n\times n}$ 中的矩阵 A 为 Z－矩阵.

---

* **收稿日期**：2011－08－30
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10961027）.
作者简介：周　平（1987－），女，云南人，硕士生，主要从事矩阵理论及其应用研究.
通迅作者：李耀堂（1958－），男，陕西人，教授，博士生导师，主要从事数值计算及其应用方面的研究.

定义3[2] 若 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$ 可表示为 $A=sI-P$,其中 $P\geqslant 0,s\geqslant\rho(P)$,则称 A 为 $M-$ 矩阵. 特别地,当 $s=\rho(P)$ 时,称 A 为奇异 $M-$ 矩阵;当 $s>\rho(P)$ 时,称 A 为非奇异 $M-$ 矩阵. 记所有 $n\times n$ 阶非奇异 $M-$ 矩阵所成之集为 M_n.

定义4[2] 设 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$,记 $q(A)=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}$,称 $q(A)$ 为 A 的最小特征值.

定义5[2] 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$,$B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$ 用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阶矩阵,即 $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})$,称其为 A 和 B 的 Hadamard 积.

定义6[2] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$B=(b_{ij})\in C^{n\times n}$,记 $A\star B=(C_{ij})$,其中 $C_{ij}=\begin{cases}a_{ii}b_{ii}, i=j,\\ -a_{ij}b_{ij}, i\neq j,\end{cases}$ 称其为 A 和 B 的 Fan 积.

定义7[2] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$n\geqslant 2$. 如果对任意的 $i\in N$,$|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称 A 为行对角占优的;若 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称 A 为行严格对角占优的;如果对任意的 $i\in N$,$|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称 A 为列对角占优的;如果 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称 A 为列严格对角占优的.

定义8 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$n\geqslant 2$. 若 A 既是行(严格)对角占优又是列(严格)对角占优阵,则称 A 为双(严格)对角占优阵.

引理1[4] 设 $A,B\in R^{n\times n}$ 都为 $M-$ 矩阵且 B 非奇异,则 $A\circ B^{-1}$ 为 $M-$ 矩阵.

引理2[4] 设 $A,B\in R^{n\times n}$ 都为 $M-$ 矩阵,则 $A\star B$ 为 $M-$ 矩阵.

定理1 若 $A,B\in R^{n\times n}$ 都为双严格对角占优矩阵,则 $A\circ B$ 为双严格对角占优矩阵.

证明 设 $A,B\in R^{n\times n}$ 均为双严格对角占优,即

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ |b_{ii}|>\sum_{j\neq i}|b_{ij}|,\ \forall i\in N,$$

故有

$$|a_{ii}b_{ii}|=|a_{ii}||b_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\sum_{j\neq i}|b_{ij}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}||b_{ij}|=\sum_{j\neq i}|a_{ij}b_{ij}|,\ \forall i\in N.$$

所以 $A\circ B$ 是行严格对角占优阵. 同理可证 $A\circ B$ 是列严格对角占优阵. 证毕.

类似地易证如下定理.

定理2 若 $A,B\in R^{n\times n}$ 都为双严格对角占优矩阵,则 $A\star B$ 也是双严格对角占优矩阵.

引理3[5] 若 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$r$ 为整数且 $1\leqslant r\leqslant n$,则 A 的任意特征值或位于

$$\Gamma_1:\underset{j\in N}{U}\{z:|z-a_{jj}|\leqslant S_j^{(r-1)}\}$$

中,其中 $S_j^{(r-1)}$ 表示矩阵 A 中第 j 列的 $r-1$ 个非对角元最大模的和;或位于

$$\Gamma_2:\underset{\substack{P\subseteq N\\|P|=r}}{U}\{z:\sum_{i\in P}|z-a_{ii}|\leqslant\sum_{i\in P}R_i\}$$

中,其中 $P\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,$|P|=r$,$|P|$表示集合 P 中元素的个数.

注1 由引理3知,当 $r=1$ 时,$\Gamma_1=\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$,$\Gamma_2$ 就是著名的 Gerschgorin 圆盘,此时 A 的特征值包含于 Γ_2 中,引理3 就成为著名的 Gerschgorin 圆盘定理;当 $2\leqslant r\leqslant n$ 时,A 的特征值或包含于 Γ_1 中或包含于 Γ_2 中.

引理4[4] (a) 若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为行严格对角占优,则 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,并且

$$|\beta_{ij}|\leqslant\frac{\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|,\ \forall i\neq j.$$

(b) 若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为列严格对角占优,则 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,并且 $|\beta_{ij}|\leqslant\dfrac{\sum\limits_{k\neq j}|a_{kj}|}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|,\ \forall i\neq j.$

引理5[4] 若 $A=(a_{ij})\in M_n$ 为行严格对角占优的 $M-$ 矩阵,则 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在且有

$$\beta_{ii} \geqslant \frac{1}{a_{ii}}, i \in N.$$

2　非奇异 M - 矩阵的逆矩阵和 M - 矩阵的 Hadamard 积的最小特征值下界估计

下面讨论 $q(B \circ A^{-1})$ 的下界. 在文献[3,9 - 10] 中分别给出了 $q(B \circ A^{-1})$ 下界的如下估计式:

$$q(B \circ A^{-1}) \geqslant q(B) \min_i \beta_{ii}.$$

$$q(B \circ A^{-1}) \geqslant \frac{1 - \rho(J_A)\rho(J_B)}{1 + \rho^2(J_B)} \min_i \frac{b_{ii}}{a_{ii}}.$$

$$q(B \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j \neq i} |b_{ij}|}{a_{ii}} \right\}.$$

其中 $s_i = \max_{j \neq i} \{s_{ij}\}, j \neq i, i \in N; s_{ji} = \dfrac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_k}{|a_{ji}|}, j \neq i.$

现在,给出 $q(B \circ A^{-1})$ 的一个只涉及矩阵 A 与 B 的元素的新的估计式.

定理 3　若 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 为双严格对角占优的 M - 矩阵,$B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$ 为非奇异 M - 矩阵,$A^{-1} = (\beta_{ij})$,则

$$q(B \circ A^{-1}) \geqslant \max_{1 \leqslant r \leqslant n} \left\{ \min \left\{ \min_j \frac{1}{a_{jj}} \left[b_{jj} - \sum_{t=1}^{r-1} |b_{i_t j}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_t k}|}{|a_{i_t i_t}|} \right], \min_{\substack{P \subseteq N \\ |P| = r}} \frac{1}{r} \left[\sum_{i \in P} \frac{1}{a_{ii}} \left(b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \frac{\sum_{k \neq j} |a_{kj}|}{|a_{jj}|} \right) \right] \right\} \right\},$$

其中 $P \subseteq N, |P| = r, r = 1,2,\cdots,n.$

证明　令 $\lambda = q(B \circ A^{-1})$.

(i) 当 $r = 1$ 时,由引理 3 及注 1 知,$\lambda \in \Gamma_2$,即存在某个 $i_0 \in N$,使得 $|\lambda - b_{i_0 i_0}\beta_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{k \neq i_0} |b_{i_0 k}\beta_{i_0 k}|$,故

$$\lambda \geqslant b_{i_0 i_0}\beta_{i_0 i_0} - \sum_{k \neq i_0} |b_{i_0 k}\beta_{i_0 k}|. \tag{1}$$

由引理 4(b),引理 5 和(1) 式得 $\lambda \geqslant \dfrac{1}{a_{i_0 i_0}} \left[b_{i_0 i_0} - \sum_{k \neq i_0} |b_{i_0 k}| \dfrac{\sum_{l \neq k} |a_{lk}|}{|a_{kk}|} \right]$,故

$$\lambda \geqslant \min_i \left\{ \frac{1}{a_{ii}} \left(b_{ii} - \sum_{k \neq i} |b_{ik}| \frac{\sum_{l \neq k} |a_{lk}|}{|a_{kk}|} \right) \right\}. \tag{2}$$

(ii) 当 $r \in N \backslash \{1, n\}$ 时,由引理 3 及注 1 知,或者 $\lambda \in \Gamma_1$,即存在某个 $j_0 (1 \leqslant j_0 \leqslant n)$,使得 $|\lambda - b_{j_0 j_0}\beta_{j_0 j_0}| \leqslant S_{j_0}^{(r-1)}$,故

$$\lambda \geqslant b_{j_0 j_0}\beta_{j_0 j_0} - S_{j_0}^{(r-1)} = b_{j_0 j_0}\beta_{j_0 j_0} - (|b_{i_1 j_0}\beta_{i_1 j_0}| + |b_{i_2 j_0}\beta_{i_2 j_0}| + \cdots + |b_{i_{r-1} j_0}\beta_{i_{r-1} j_0}|). \tag{3}$$

由引理 4(a) 和(3) 式,得

$$\lambda \geqslant b_{j_0 j_0}\beta_{j_0 j_0} - \left(|b_{i_1 j_0}| \frac{\sum_{k \neq i_1} |a_{i_1 k}|}{|a_{i_1 i_1}|} |\beta_{j_0 j_0}| + |b_{i_2 j_0}| \frac{\sum_{k \neq i_2} |a_{i_2 k}|}{|a_{i_2 i_2}|} |\beta_{j_0 j_0}| + \cdots + |b_{i_{r-1} j_0}| \frac{\sum_{k \neq i_{r-1}} |a_{i_{r-1} k}|}{|a_{i_{r-1} i_{r-1}}|} |\beta_{j_0 j_0}| \right) \geqslant$$

$$b_{j_0 j_0}\beta_{j_0 j_0} - \beta_{j_0 j_0} \sum_{t=1}^{r-1} |b_{i_t j_0}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_t k}|}{|a_{i_t i_t}|}. \tag{4}$$

由引理 5 和(4) 式,得 $\lambda \geqslant \dfrac{1}{a_{j_0 j_0}} \left(b_{j_0 j_0} - \sum_{t=1}^{r-1} |b_{i_t j_0}| \dfrac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_t k}|}{|a_{i_t i_t}|} \right)$,即

$$\lambda \geqslant \min_j \left\{ \frac{1}{a_{jj}} \left(b_{jj} - \sum_{t=1}^{r-1} |b_{i_t j_0}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_t k}|}{|a_{i_t i_t}|} \right) \right\}. \tag{5}$$

或者 $\lambda \in \Gamma_2$,即存在某个 $P_0 \subseteq N, |P_0| = r$,使得 $\sum_{i \in P_0} |\lambda - b_{ii}\beta_{ii}| \leqslant \sum_{i \in P_0} (\sum_{k \neq i_0} b_{i_0k}\beta_{i_0k})$,故

$$\lambda \geqslant \frac{1}{r}[\sum_{i \in P_0} (b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k \neq i_0} |b_{i_0k}\beta_{i_0k}|)]. \tag{6}$$

由引理4(b)和(6)式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{r}\left[\sum_{i \in P_0}\left(b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k \neq i} |b_{ik}| \frac{\sum_{l \neq k} |a_{lk}|}{|a_{kk}|} |\beta_{ii}|\right)\right]. \tag{7}$$

由引理5和(7)式,得

$$\lambda \geqslant \min_{\substack{P \subseteq N \\ |P| = r}} \frac{1}{r}\left[\sum_{i \in P}\left(\frac{1}{a_{ii}}\left(b_{ii} - \sum_{k \neq i} |b_{ik}| \frac{\sum_{l \neq k} |a_{lk}|}{|a_{kk}|}\right)\right)\right]. \tag{8}$$

(iii) 当 $r = n$ 时,由引理3及注1知,或者 $\lambda \in \Gamma_1$,即存在某个 $j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant n)$,使得

$$|\lambda - b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}| \leqslant S_{j_0}^{(n-1)},$$

$$\lambda \geqslant b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0} - S_{j_0}^{(n-1)} = b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0} - (|b_{i_1j_0}\beta_{i_1j_0}| + |b_{i_2j_0}\beta_{i_2j_0}| + \cdots + |b_{i_{n-1}j_0}\beta_{i_{n-1}j_0}|). \tag{9}$$

由引理4(a)和(9)式,得

$$\lambda \geqslant b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0} - \beta_{j_0j_0} \sum_{t=1}^{n-1} |b_{i_tj_0}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_tk}|}{|a_{i_ti_t}|}. \tag{10}$$

由引理5和(10)式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{a_{j_0j_0}} b_{j_0j_0} - \frac{1}{a_{j_0j_0}} \sum_{t=1}^{n-1} |b_{i_tj_0}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_tk}|}{|a_{i_ti_t}|} = \frac{1}{a_{j_0j_0}}\left(b_{j_0j_0} - \sum_{t=1}^{n-1} |b_{i_tj_0}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_tk}|}{|a_{i_ti_t}|}\right),$$

即

$$\lambda \geqslant \min_j \left\{\frac{1}{a_{jj}}\left(b_{jj} - \sum_{t=1}^{n-1} |b_{i_tj}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_tk}|}{|a_{i_ti_t}|}\right)\right\}. \tag{11}$$

或者 $\lambda \in \Gamma_2$,即对 $1,2,\cdots,n \in N$,使得

$$|\lambda - b_{11}\beta_{11}| + |\lambda - b_{22}\beta_{22}| + \cdots + |\lambda - b_{nn}\beta_{nn}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k \neq i} |b_{ik}\beta_{ik}|),$$

$$\lambda \geqslant \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} (b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k \neq i} |b_{ik}\beta_{ik}|)]. \tag{12}$$

由引理4(b)和(12)式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k \neq i} |b_{kk}| \frac{\sum_{l \neq k} |a_{lk}|}{|a_{kk}|} |\beta_{ii}|\right)\right]. \tag{13}$$

由引理5和(13)式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}}\left(\beta_{ii} - \sum_{k \neq i} |b_{ii}| \frac{\sum_{l \neq k} |a_{lk}|}{|a_{kk}|}\right)\right]\right\}. \tag{14}$$

由(i),(ii),(iii)知

$$q(B \circ A^{-1}) \geqslant \max_{1 \leqslant r \leqslant n}\left\{\min\left\{\min_j \frac{1}{a_{jj}}\left[b_{jj} - \sum_{t=1}^{r-1} |b_{i_tj}| \frac{\sum_{k \neq i_t} |a_{i_tk}|}{|a_{i_ti_t}|}\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\min_{\substack{P \subseteq N \\ |P| = r}} \frac{1}{r}\left[\sum_{i \in P} \frac{1}{a_{ii}}\left(b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \frac{\sum_{k \neq j} |a_{kj}|}{|a_{jj}|}\right)\right]\right\}\right\}.$$

例 1　令

$$A=\begin{pmatrix}6&-1&-1&-1\\-2&5&-1&-1\\0&-2&7&-1\\-1&-1&-1&8\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

显然 $A,B\in M_4$ 且 A 为双严格对角占优的,应用文献[3]中定理5.7得 $q(B\circ A^{-1})\geqslant 0.0268$;应用文献[9]中定理9得 $q(B\circ A^{-1})\geqslant 0.0555$;应用文献[10]中定理2.1得 $q(B\circ A^{-1})\geqslant 0.0714$;应用本文的定理3得 $q(B\circ A^{-1})\geqslant 0.0747$.

3　$q(A\star B)$ 的下界

本节我们讨论非奇异 M - 矩阵的 Fan 积 $q(A\star B)$ 的最小特征值下界.

若 $A,B\in M_n$,在文献[3,8-10]中分别给出了 $q(A\star B)$ 的最小特征值下界的如下估计式:

$$q(A\star B)\geqslant q(A)q(B);\tag{15}$$

$$q(A\star B)\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}q(B)+b_{ii}q(A)-q(A)q(B)\};\tag{16}$$

$$q(A\star B)\geqslant \min_{i}(1-\rho(J_A)\rho(J_B))\min_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ii}b_{ii});\tag{17}$$

$$q(A\star B)\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-m_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\};\tag{18}$$

其中 $m_i=\max\limits_{j\neq i}\{m_{ji}\},m_{ji}=|a_{ji}|h_j,h_j=\begin{cases}d_j,d_j\neq 0,\\1,d_j=0,\end{cases}d_j=\dfrac{R_j}{|a_{jj}|};i,j\in N.$

下面给出 $q(A\star B)$ 的下界的一个新的估计式.

定理 4　若 $A,B\in M_n$,则

$$q(A\star B)\geqslant \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left\{\min\left\{\min_{j}\left(a_{jj}b_{jj}-\sum_{t=1}^{r-1}|a_{i_tj}b_{i_tj}|\right),\min_{\substack{P\subseteq N\\|P|=r}}\frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P}\left(a_{ii}\,b_{ii}-\sum_{j\neq i}|-a_{ij}\,b_{ij}|\right)\right]\right\}\right\},$$

其中 $P\subseteq N,|P|=r,r=1,2,\cdots,n.$

证明　证明过程类似于定理3的证明,略去. 证毕.

例 2　令

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&-1&-1\\-2&5&-1&-1\\0&-2&4&-1\\-1&-1&-1&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

显然 $A,B\in M_4$,应用式(15)有 $q(A\star B)\geqslant 0.191$;应用(16)式有 $q(A\star B)\geqslant 1.573$;应用(17)式有 $q(A\star B)\geqslant 0.1808$;应用(18)式有 $q(A\star B)\geqslant 2.4333$;应用本文的定理4有 $q(A\star B)\geqslant 3$.

4　非负矩阵的 Hadamard 积谱半径 $\rho(A\circ B)$ 的上界

本节我们讨论非负矩阵 A,B 的 Hadamard 积的 $\rho(A\circ B)$ 上界.

在文献[3,8-10]中,分别给出了非负矩阵 A,B 的 Hadamard 积的 $\rho(A\circ B)$ 的如下上界:

$$\rho(A\circ B)\leqslant\rho(A)\rho(B); \tag{19}$$

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(A)\rho(B)-a_{ii}\rho(B)-b_{ii}\rho(A)\}; \tag{20}$$

$$\rho(A\circ B)\leqslant(1+\rho(J_A^1)\rho(J_B^1)\}\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}b_{ii}; \tag{21}$$

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_i\left\{a_{ii}b_{ii}+m_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\}. \tag{22}$$

定理5 若$A,B\in R^{n\times n}$是2个非负矩阵,则

$$\rho(A\circ B)\leqslant\min_{1\leqslant r\leqslant n}\left\{\max\left\{\max_j\left(a_{jj}b_{jj}+\sum_{t=1}^{r-1}|a_{i_tj}b_{i_tj}|\right),\max_{\substack{P\subseteq N\\|P|=r}}\frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P}\left(a_{ii}b_{ii}+\sum_{j\neq i}|a_{ij}b_{ij}|\right)\right]\right\}\right\},$$

其中$P\subseteq N$,$|P|=r$,$r=1,2,\cdots,n$.

证明 证明过程类似于定理3的证明,略去.证毕.

例3 令

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\2&5&1&1\\0&2&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&3&&2\\0&1&4&3\\0&0&1&5\end{pmatrix}.$$

应用(19)式有$\rho(A\circ B)\leqslant 50.1274$;应用(20)式有$\rho(A\circ B)\leqslant 25.5364$;应用(21)式有$\rho(A\circ B)\leqslant 39.7468$;应用(22)式有$\rho(A\circ B)\leqslant 23.2$;应用本文的定理5有$\rho(A\circ B)\leqslant 23$.

参考文献:

[1] 黄廷祝,杨传胜.特殊矩阵分析及应用[M].北京:科学出版社,2003.

[2] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

[3] HORM R A,JOHNSON C R. Topic in matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[4] HORM R A. JOHNSON C R. Topic in matrix analysis[M]. Beijing: People's Posts and Telecommunications Press, 2005.

[5] RICHARD A. Brualdi, Stephen Mellendorf, Regions in the complex plane containing the eigenvalues of a matrix[J]. Math Monthly, 1994, 101: 975-985.

[6] YONG X R. Proof of a conjecture of fiedler and markham[J]. Linear Algebra and its applications, 2000, 320: 167-171.

[7] CHEN Shen-can. Proof of a conjecture concerning the Hadamard powers of inverse matrices[J]. Linear Algebra and its applications, 2007, 422: 477-481.

[8] FANG M Z. Bounds on eigenvalues of Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra and its applications, 2007, 425: 7-15.

[9] HUANG R. Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra and its applications, 2008, 428: 1551-1559.

[10] LI Y T, LI Y Y, WANG R W, et al. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra and its applications, 2010, 432: 536-545.

[11] 李艳艳,李耀堂.矩阵Hadamard积和Fan积的特征值界的估计[J].云南大学学报:自然科学版,2010,32(2):125-129.

[12] 赵仁庆,熊昌明,李耀堂.块H－矩阵的判定及其逆的无穷大范数的上界[J].云南大学学报:自然科学版,2011,33(2):125-130.

(下转第25页)

[5] 杨继红. CCD 桥梁振动检测系统的设计与实现[D]. 西安:西安电子科技大学,2007.
[6] 朱蕊苹,宋建光. 网络化作战系统中的多雷达时空数据配准[J]. 现代防御技术,2008,36(2):20-29
[7] 祁永庆. 多平台多传感器配准算法研究[D]. 上海:上海交通大学,2008.
[8] 贺席兵. 信息融合中多平台多传感器的时空对准研究[D]. 西安:西北工业大学,2001.
[9] 高海波. 多源传感器最优配准技术和算法研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2009.
[10] 田利梅,叶卫东. 卡尔曼滤波在桥梁健康监测系统中的应用研究[J]. 计算机测量与控制,2005,13(6):524-526.
[11] SUKUN KIN,PAKZAD S,CULLER D,et al. Health monitoring of civiI infrastructures using wireless sensor networks[C]// Information Processing in Sensot NetworkS IEEE,2007(6):254-263.

Multi－sensor data alignment for bridge health monitoring

ZHAO Ling, LIU Yun, HUAN Qiao-yong
(College of Information Engineering and Automation,Kunming University of Science and Technology,Kunming 650500,China)

Abstract: Aimed at the problem of credibility and accuracy exiting in multi－sensor data for bridge health monitoring,this paper presents a model based on two－dimensional data processing. To make reliability of the measurements,first asynchronous data are equalized by the least square algorithm,and through the geometric coordinate transformation algorithm,measurements will be placed in the same space and time coordinate system. To improve accuracy of the measurements,Kalman filter is applied to reduces the system error after the data alignment. The simulation results show that the methods significantly increase the credibility and accuracy of data in multi－sensor networks for bridge health monitoring.

Key words: bridge health monitoring; multi－sensor; data alignment; Kalman filter

* *

(上接第 14 页)

Estimate of bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices and nonnegative matrices

ZHOU Ping, LI Yao-tang
(School of Mathematics and Statistics,Yunnan University,Kunming 650091,China)

Abstract: A new lower bound of the minimum eigenvalues of Hadamard product for inverse A^{-1} of nonsingular M－matrix A and nonsingular M－matrix B,a new lower bound of the smallest eigenvalues of Fan product for nonsingular M－matrices A and B,and a new supper bound of the spectral radius of Hadamard product for nonnegative matrices A and B,are given respectively. These three estimating formulas of the bounds are easier to calculate since they only depend on the entries of matrices A and B. The given examples show that the estimating formulas of the bounds are better than several known estimating formulas.

Key words: M－matrix; nonnegative matrix; Hadamard product; Fan product; spectral radius; smallest eigenvalue