云南大学学报（自然科学版），2011，33（4）：412～416 CN 53－1045/N ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性所对应的一种新守恒量*1

郑世旺，陈　梅
（商丘师范学院 物理与信息工程系，河南 商丘　476000）

摘要：研究了非完整力学系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性所对应的一种新守恒量，给出了这种守恒量的函数表达式和导致这种守恒量的判据方程．利用该方法比以往更易找到守恒量，最后举例说明了新结果的应用．

关键词：非完整系统；Tzénoff 方程；Mei 对称性；新守恒量
中图分类号：O 316　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971（2011）04－0412－05

对称性原理是物理学中更高层次的法则，动力学系统中的守恒量更能揭示深刻的物理规律．1918 年德国女科学家 A．E．Noether 首次发现，对称性与守恒量之间有对应关系，通过研究动力学系统的对称性可以找出系统的守恒量，并建立了 Noether 对称性理论[1]．近年来我国学者借助于动力学系统的 Lagrange 函数或 Hamilton 函数深入而广泛地研究了 Noether 对称性[1－6]、Lie 对称性[6,7－9]和 Mei 对称性[6,10－12]，求出了系统的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量或 Mei 守恒量．这些守恒量都是我们熟知的守恒量，利用 3 种对称性寻求新的守恒量有重要意义．最近文献［13］研究表明，Lagrange 系统的 Mei 对称性可直接导致有别于 Mei 守恒量的另一种守恒量．在动力学系统中有多种运动微分方程，如 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程和 Tzénoff 方程等，其中 Tzénoff 方程最为简捷，只要给出系统的 Tzénoff 函数，研究系统的运动规律是比较方便的．目前，Tzénoff 方程的对称性与守恒量的研究较少，现刚有了初步成果[14－20]，通过 Tzénoff 方程的对称性进一步寻找新的守恒量是我们的研究目标．本文给出了非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性所对应的一种新守恒量，该守恒量不同于以往研究过的守恒量，求解该守恒量不需要 Lagrange 函数或 Hamilton 函数，其结构方程和守恒量直接由 Tzénoff 函数来表达，如果非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的生成元和规范函数满足本文给出的结构方程，那么该力学系统就一定存在这种新守恒量．

1　非完整系统的 Tzénoff 方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，系统的运动受有理想 *Chetaev* 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0.\tag{2}$$

系统的 Tzénoff 函数为

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-Q_s\ddot{q}_s\quad(s=1,\cdots,n),\tag{3}$$

---

* 收稿日期：2011－01－17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10972127）．
作者简介：郑世旺（1963－　），男，河南人，教授，主要从事一般力学方面的研究．Email：hi_zsw@sina.com．

其中 T 为系统的动能,$\ddot{T}$ 为把 T 中广义速度作为常数时对时间 t 的二阶导数,Q_s 为广义力,则非完整系统在广义坐标下的 Tzénoff 方程为

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s} = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{4}$$

设系统非奇异,可由方程(1),(4)先求得乘子 $\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,可将方程(4)表示为

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\Lambda_s \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{5}$$

(5)式中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}.$$

从表面上看,通过(1)式和(4)式应能求出广义加加速度

$$\dddot{q}_s = \beta_s(t,q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s), \tag{6}$$

其实不然,因为对于一个实际的力学系统,Tzénoff 函数是一种多项式,其中 $\dddot{q}_s$ 总只是其中乘积项 $\frac{1}{2}m_i\dot{q}_s\dddot{q}_s$ 的因子(质量 m_i 为常量),故通过(1)式和(4)式可直接求出的不是(6)式,而是广义加速度

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{7}$$

当然,如果需要的话可通过(7)式对时间求导得到广义加加速度(6)式.

2　非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性所导出的新守恒量

取时间和坐标的群的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{8}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{9}$$

其中 ε 是一无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小变换生成元. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}q_s + \varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = \ddot{q}_s + \varepsilon[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\bullet} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3q_s^*}{\mathrm{d}t^{*3}} = \dddot{q}_s + \varepsilon\{[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\bullet} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]^{\bullet} - \dddot{q}_s\dot{\xi}_s\} + O(\varepsilon^2)$$

$$K^* = K\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}},\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*3}}\right) = K\left(t,\boldsymbol{q},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^3}\right) + \varepsilon X^{(3)}(K) + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

$$\Lambda_s^* = \Lambda_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s) + O(\varepsilon^2), \tag{11}$$

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(f_\beta) + O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

其中

$$X^{(3)}(K) = \frac{\partial K}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial K}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}[\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\bullet} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + \frac{\partial K}{\partial \dddot{q}_s}\{[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\bullet} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]^{\bullet} - \dddot{q}_s\dot{\xi}_0\},$$

$$X^{(1)}(K) = \frac{\partial K}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial K}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0).$$

非完整约束(1)式在变换(9)式下的不变性归结为约束限制方程

$$X^{(1)}\{f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\}=0 \quad (\beta=1,\cdots,g). \tag{13}$$

因为用变换后的动力学函数代替变换前的动力学函数,运动微分方程的形式仍保持不变的一种对称性称为 Mei 对称性[6],故可得到.

定义 如果用变换后的 Tzénoff 函数 K^* 代替变换前的函数 K,方程(5)的形式保持不变,即

$$\frac{\partial K^*}{\partial\ddot{q}_s}=\Lambda_s^* \quad (s=1,\cdots,n), \tag{14}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}\{X^{(3)}(K)\}=X^{(1)}(\Lambda_s), \tag{15}$$

且约束限制方程(13)成立,那么这种不变性称为非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性.(15)式即为非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的判据方程.于是我们可进一步得到下面的定理.

定理 对于非完整力学系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s,如果能找到规范函数 G 满足如下结构方程

$$X^{(1)}[X^{(3)}(K)]+\beta_s\xi_0X^{(1)}(\Lambda_s)+\xi_0\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dddot{q}_s}\frac{\bar{d}}{dt}\beta_s+X^{(3)}(K)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+$$
$$E_s[X^{(3)}(K)](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G=0, \tag{16}$$

则 Tzénoff 方程的 Mei 对称性将直接导致另一种新守恒量

$$I=\xi_0X^{(3)}(K)+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G=\mathrm{sonst}, \tag{17}$$

(16)式中

$$E_s=\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial}{\partial q_s}.$$

证明 对(17)式求导并考虑到在 Mei 对称性情况下判据方程(15)成立,有

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{d}I}{dt}=&\left[\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial t}+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\ddot{q}_s}\beta_s+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dddot{q}_s}\cdot\frac{\bar{d}}{dt}\beta_s\right]\xi_0+X^{(3)}(K)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\\
&\left[\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dot{q}_s}\right)\right](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\ddot{q}_s\xi_0-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)+\frac{\bar{d}}{dt}G=\\
&X^{(1)}[X^{(3)}(K)]-\xi_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}+\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}\dot{q}_s\xi_0+\beta_s\xi_0X^{(1)}(\Lambda_s)+\xi_0\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dddot{q}_s}\cdot\frac{\bar{d}}{dt}\beta_s+\\
&X^{(3)}(K)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\left[\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dot{q}_s}\right)\right](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G=\\
&X^{(1)}[X^{(3)}(K)]+\beta_s\xi_0X^{(1)}(\Lambda_s)+\xi_0\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dddot{q}_s}\cdot\frac{\bar{d}}{dt}\beta_s+X^{(3)}(K)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\\
&\left[\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dot{q}_s}\right)-\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}\right](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G=\\
&X^{(1)}[X^{(3)}(K)]+\beta_s\xi_0X^{(1)}(\Lambda_s)+\xi_0\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial\dddot{q}_s}\cdot\frac{\bar{d}}{dt}\beta_s+X^{(3)}(K)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0+\\
&E_s[X^{(3)}(K)](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{d}}{dt}G=0
\end{aligned}$$

证毕.

3 应用例子

非完整系统的 Tzénoff 函数和约束方程分别为

$$K = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dddot{q}_1) + \frac{1}{2}(\ddot{q}_2^2 + \dot{q}_2\dddot{q}_2), \tag{18}$$

$$f = -t\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0. \tag{19}$$

试求该力学系统的 Mei 对称性直接导致的新守恒量(17).

解　由非完整系统的 Tzénoff 方程(4) 给出

$$\ddot{q}_1 = -\lambda t, \ddot{q}_2 = \lambda. \tag{20}$$

由(19) 式和(20) 式求得

$$\lambda = \frac{\dot{q}}{1+t^2}, \tag{21}$$

(19) 式成为

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t\dot{q}_1}{1+t^2} = \alpha_1, \quad \ddot{q}_2 = \frac{\dot{q}_1}{1+t^2} = \alpha_2, \tag{22}$$

由(22) 式可得到

$$\dddot{q}_1 = \frac{\dot{q}_1(t^2-1) - t\ddot{q}_1(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \beta_1, \quad \dddot{q}_2 = \frac{\ddot{q}_1(1+t^2) - 2\dot{q}_1 t}{(1+t^2)^2} = \beta_2, \tag{23}$$

由(6) 式给出

$$\Lambda_1 = -\frac{t\dot{q}_1}{1+t^2}, \Lambda_2 = \frac{\dot{q}_1}{1+t^2}. \tag{24}$$

做计算

$$X^{(3)}(K) = \frac{1}{2}\dddot{q}_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + \frac{1}{2}\dddot{q}_2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}\dot{\xi}_0) + \ddot{q}_1(\ddot{\xi}_1 - 2\alpha_1\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0) + \ddot{q}_2(\ddot{\xi}_2 - 2\alpha_2\dot{\xi}_0 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0) +$$
$$\frac{1}{2}\dot{q}_1\{[(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)^{\bullet} - \ddot{q}_1\dot{\xi}_0]^{\bullet} - \dddot{q}_1\dot{\xi}_0\} + \frac{1}{2}\dot{q}_2\{[(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)^{\bullet} - \ddot{q}_2\dot{\xi}_0]^{\bullet} - \dddot{q}_2\dot{\xi}_0\},$$

$$X^{(1)}(\Lambda_1) = -\frac{t}{1+t^2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0),$$

$$X^{(1)}(\Lambda_2) = \frac{t}{1+t^2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0),$$

$$X^{(1)}(f_\beta) = -t(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0).$$

取生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = (q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2)^2, \tag{25}$$

有

$$\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0, X^{(3)}(K) = X^{(1)}(\Lambda_1) = X^{(1)}(\Lambda_2) = X^{(1)}(f_\beta) = 0,$$

显然 Mei 对称性判据方程(15) 成立,Tzénoff 方程具有 Mei 对称性. 结构方程(16) 给出.

$$G_1 = 0, G_2 = q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2. \tag{26}$$

当 $G_1 = 0$ 时,(17) 式给出平凡守恒量,当 $G_2 = q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2$ 时,(17) 式给出新守恒量

$$I = q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2 = \text{const}.$$

参考文献:

[1]　NOETHER A E. Invariance variations problems [J]. Kgl Ges Wiss Nachr Göttingen Math Phys, 1918, Kl, II: 235-257.

[2]　CHEN Xiang-wei, LI Yan-min. Exact invariants and adiabatic invabiants of the singular lagrange system[J]. Chinese Physics, 2003, 12(9): 936-939.

[3]　李彦敏. 变质量非完整力学系统的共形不变性[J]. 云南大学学报:自然科学版, 2010, 32(1): 52-57.

[4]　刘畅, 赵永红, 陈向炜. 动力学系统 Noether 对称性的几何表示[J]. 物理学报, 2010, 59(1): 11-14.

[5]　楼智美. 二阶非线性耦合动力学系统守恒量的扩展 Prelle – Singer 求法与对称性研究[J]. 物理学报, 2010, 59(2): 719-723.

[6] 梅凤翔.约束力学系统的对称性与守恒量[M].北京:北京理工大学出版社,2004.
[7] 张毅.事件空间中完整系统的Lie对称性与绝热不变量[J].物理学报,2007,56(6):3 054-3 059.
[8] 张宏彬,吕洪升,顾书龙.完整约束力学系统保Lie对称性差分格式[J].物理学报,2010,59(8):5 213-5 218.
[9] FANG Jian-hui. A new type of conserved quantity of Lie symmetry for the Lagrange system[J]. Chinese Physics B,2010,19(4):040301 - 1- 040301 - 4.
[10] MEI Feng-xiang. Form invariance of Lagrange system[J]. Journal of Beijing Institute of Technology,2000,9(2):120-124.
[11] 贾利群,张耀宇,罗绍凯,等.事件空间中单面非Chetaev型非完整系统Nielsen方程的Mei对称性与Mei守恒量[J].物理学报,2009,58(4):2 141-2 146.
[12] 贾利群,张耀宇,崔金超.完整系统Appell方程Mei对称性的结构方程和Mei守恒量[J].云南大学学报:自然科学版,2009,31(1):52-56.
[13] 方建会.Lagrange系统Mei对称性直接导致的一种守恒量[J].物理学报,2009,58(6):3 617-3 619.
[14] ZHENG Shi-wang,JIA Li-qun,YU Hong-sheng. Mei symmetry of Tzénoff equations of holonomic system[J]. Chinese Physics,2006,15(7):1 399-1 402.
[15] ZHENG Shi-wang,XIE Jia-fang,JIA Li-qun. Symmetry and conserved quantity of Tzénoff equations for holonomic systems with redundant coordinates[J]. Chinese Physics Letters,2006,23(11):2 924-2 927.
[16] 郑世旺,贾利群.非完整系统Tzénoff方程的Mei对称性与守恒量[J].物理学报,2007,56(2):661-665.
[17] ZHENG Shi-wang,XIE Jia-fang,JIA Li-qun. Symmetry and Hojman conserved quantity of Tzénoff equations for unilateral holonomic system[J]. Communications in Theoretical Physics,2007,48(1):43-47.
[18] ZHENG Shi-wang,XIE Jia-fang,LI Yan-min. Mei symmetry and conserved quantity of Tzénoff equations for nonholonomic systems of non - Chetaev's type[J]. Communications in Theoretical Physics,2008,49(4):851-854.
[19] ZHENG Shi-wang,XIE Jia-fang,ZHANG Qing-hua. Mei symmetry and new conserved quantity of Tzénoff equations for holonomic systems[J]. Chinese Physics Letters,2007,24(8):2 164-2 166.
[20] 郑世旺,解加芳,陈向炜,等.完整系统Tzénoff方程的Mei对称性直接导致的另一种守恒量[J].物理学报,2010,59(8):5 209-5 212.

A new conserved quantity by Mei symmetry of Tzénoff equation for the non - holonomic systems

ZHENG Shi-wang, CHEN Mei
(Department of Physics and Information Engineering,Shangqiu Teachers College,Shangqiu 476000,China)

Abstract: A new conserved quantity is investigated by utilizing the definition and discriminant equation of Mei symmetry of Tzenoff equations for nonholonomic systems. In addition, the expression of this conserved quantity, and the determining condition induced new conserved quantity are also presented. The results indicate that this new method is easier to find conserved quantities than methods reported previously. Finally, application of this new result is presented by a practical example.

Key words: non - holonomic systems; Tzénoff equations; Mei symmetry; new conserved quantity