

随机 Logistic 模型的稳态关联函数^{* 1}

陈丽丽¹, 何银梅², 谢崇伟²

(1. 昆明理工大学 成人教育学院, 云南 昆明 650093; 2. 云南大学 物理科学技术学院, 云南 昆明 650091)

摘要: 针对 2 个 Gauss 白噪声驱动的 Logistic 模型, 研究了噪声间的关联效应对稳态关联函数的影响. 利用 Stratonovich 近似解耦, 得到了随机 Logistic 模型的稳态关联函数和相应的衰减速率. 经过数值计算, 结果表明: 噪声的负关联效应不会破坏原有的稳态关联函数的变化趋势, 但使得稳态关联函数的衰减加速, 而噪声的正关联效应会导致稳态关联函数衰减出现慢化.

关键词: 关联噪声; Logistic 模型; 稳态关联函数

中图分类号: O 414. 22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0258-7971(2012)04-0420-05

Logistic 模型的提出最早源于种群生态学的研究, 常被用来模拟和分析各种生物种群的动态变化规律. 具体而言, 考虑到自然资源的有限性以及种群增殖的被阻滞性, 生物种群随时间演化的动力学性质可用方程:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

来刻画. 方程(1)就是所谓的确定性 Logistic 方程. 如果用(1)式描述种群的生长过程, 则态变量 x 代表种群数量, 系数 a 为种群的内在增长率, 也即平均净增长率, 反映了物种内在的特性. 系数 b 为抑制率, $-bx^2$ 体现了由于生存的空间和资源的有限性而导致的个体之间的竞争, 从而制约了 x 的无穷增长. 当进一步考虑到环境等因素存在的随机波动, 而这些随机扰动直接影响着种群数量的演化, 在 Logistic 确定性方程中引入反映随机因素的所谓噪声项加以修正, 这样就得到相应的随机 Logistic 演化方程.

Logistic 模型尽管源于种群生态学的研究, 然而该模型描述揭示了一类事物所共有的最普遍的和最基本的规律, 即在 2 种相互对抗因素作用下系统演化的动力学规律, 因而 Logistic 模型在自然科学的许多领域乃至社会科学领域的研究中都有着广泛的应用. 从物理学的角度来看, 随机 Logistic 模型刻画的是随机力驱动下的一个非线性动力学系统. Leung、Jackson 以及 Mannella 等分别研究了单一 Gauss 白噪声和单一 Gauss 色噪声驱动的 Logistic 模型^[1-3]. 然而随着随机动力学研究的深入, 人们认识到噪声之间的相互关联可能会改变系统的动力学行为, 如对稳态几率分布 (SPD)^[4-5]、平均首通时间 (MFPT)^[6-7]、随机共振现象^[8-9] 等都会产生影响. 当考虑到噪声间相互关联耦合的存在, Ai 等将关联噪声引入了 Logistic 模型的研究中^[10]. Gora 在 Leung 等研究的基础上, 进一步将随机 Logistic 模型推广到极为一般的情况, 其动力学演化方程可表示为^[11]:

$$\frac{dx}{dt} = [a + \xi(t)]x - [b + \eta(t)]x^2, \quad (2)$$

其中噪声 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 分别反映了随机因素对系数 a 、 b 的扰动, 同时 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间存在相互关联.

在 Logistic 确定性方程描述的系统中, 如果有 $b > 0$, 其态变量 x 收敛于一个固定点, 即系统有一个

* 收稿日期: 2011-11-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11165016).

作者简介: 陈丽丽(1962-), 女, 云南人, 副教授, 主要从事理论物理研究.

通讯作者: 谢崇伟(1962-), 男, 云南人, 教授, 主要从事理论物理研究. E-mail: kmxie@126.com.

+ b “收敛”;如果 $b \leq 0$, 态变量 x 在有限时间内会出现无限制的增长, 系统存在 $-b$ “爆增”. Leung 的研究针对于系数 a 受到随机扰动情况, 即随机方程(2)中 $\eta(t) = 0$ ^[11]; 而 Mao 就系数 b 受到随机扰动情况, 即 $\xi(t) = 0$ 进行了讨论, 发现噪声 $\eta(t)$ 的存在会抑制态变量 x 的爆炸式增长, 系统仍保持正值并且是有界的^[12]. 此外, Gora 较详细地分析了 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 噪声关联强度对稳态几率分布函数的影响, 发现态变量 x 其方差随噪声强度变化会出现共振效应; 研究了谐和与 Gauss 白噪声激励下的 Logistic 模型的随机共振问题^[11,13], 并就随机 Logistic 方程进行数值模拟时出现的困难作了相关的讨论^[14].

我们知道, 稳态关联函数和相应的弛豫时间是描述噪声驱动系统动力学性质非常重要的物理量. 那么噪声 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 强度及它们之间的关联强度对系统关联函数和弛豫时间又会产生什么影响呢? 本文正是在文献[11]的基础上, 针对方程(2)所刻画的随机 Logistic 模型, 分析探讨了白噪声 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 的关联强度的变化对稳态关联函数和弛豫时间的影响.

1 稳态几率分布

考虑双噪声共同驱动的 Logistic 模型的 Langevin 方程,

$$\frac{dx}{dt} = [a + p\xi(t)]x - [b + q\eta(t)]x^2, \quad (3)$$

其中噪声 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 为 Gauss 白噪声, 其统计性质如下:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} \xi(t+s) \\ \eta(t+s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) & \eta(t) \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \delta(s). \quad (5)$$

在(3)式所描述的 Logistic 动力学模型中, 噪声 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 相互关联的, 并且噪声 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 乘性作用于系统上, 其 λ ($-1 \leq \lambda \leq 1$) 度量的它们之间的关联耦合程度. p 是噪声 $\xi(t)$ 的强度, q 为噪声 $\eta(t)$ 的强度.

在分析 Gauss 白噪声激励产生的系统响应时, 可以对 Gauss 白噪声给出 Itô 或 Stratonovich 2 种不同的解释. Gora 等的相关工作中采用了 Itô 解释^[11]. 本文中我们也同样采用 Itô 解释, 即随机积分中, Gauss 白噪声被看成理想的白噪声, 它在某一时刻上之值与它在此时刻之前的任一时刻上之值以及由此时刻之前白噪声激励产生的响应皆不相关.

Langevin 方程在(3)反映噪声统计性质的(4)和(5)式条件下, 可进一步转化为 Fokker - Planck 方程:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(ax - bx^2)\rho(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x)\rho(x,t), \quad (6)$$

其中:

$$G(x) = px^2 - 2\lambda \sqrt{pq}x^3 + qx^4.$$

这样在自然边界下, 可得到稳态几率分布函数^[11]:

$$\rho_{st}(x) = N\Phi(x) \exp\left[\frac{a\lambda p^{-1} - b(pq)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \arctan \frac{xq^{\frac{1}{2}}p^{-\frac{1}{2}} - \lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right], \quad (7)$$

$$\Phi(x) = \frac{x^{\frac{(a-p)}{p}}}{(p - 2\lambda \sqrt{pq}x + qx^2)^{\frac{(a+p)}{2p}}}, \quad (8)$$

其中 N 为归一化常数. 如果采用 Stratonovich 噪声解释, 需对稳态概率分布函数(7)的 $\Phi(x)$ 因子作相应的修正.

2 稳态关联函数

本文我们的关注点是遵循随机 Logistic 方程(3)演化的态变量 x 的稳态双时关联函数. 只要系统的稳态存在, 在 t 和 $t+s$ ($s \geq 0$) 时刻的态变量的归一化稳态关联函数可定义为:

$$C(s) = \frac{\langle x(t+s)x(t) \rangle_{st} - \langle x \rangle_{st}^2}{\langle (\delta x)^2 \rangle_{st}} = \frac{\langle \delta x(t+s)\delta x(t) \rangle_{st}}{\langle (\delta x)^2 \rangle_{st}}, \quad (9)$$

$$\text{且} \langle (\delta x)^2 \rangle_{st} = \langle x^2 \rangle_{st} - \langle x \rangle_{st}^2, \langle x^n \rangle_{st} = \int x^n \rho_{st} dx.$$

而 $C(s)$ 对应的弛豫时间为

$$T_c = \int_0^{\infty} C(s) ds. \quad (10)$$

当系统达到稳态后,由于噪声的影响,态变量 x 并非时时为 $\langle x \rangle_{st}$,会产生所谓的涨落现象. 关联函数 $C(s)$ 实际上就是在 t 时出现涨落的情况下,在 $t+s$ 时刻又出现涨落的条件概率,它反映了态变量 x 在 t 时刻与平均值的偏离和在 $t+s$ 时刻与平均值的偏离之间的关联,即关联函数 $C(s)$ 随时间的变化反映了稳态下的涨落随时间的演化情况.

按照文献[15]的处理思路,先将 Itô 随机方程(3)转变为等价 Stratonovich 方程^[5],

$$\frac{dx}{dt} = \left(ax - bx^2 - \frac{p}{2}x + \frac{3}{2}\lambda pqx^2 - qx^3 \right) + px\xi(t) - qx^2\eta(t), \quad (11)$$

相应的 Fokker - Planck 方程

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = L_{\text{FP}} \rho(x, t), \quad (12)$$

且 Fokker - Planck 算符 L_{FP} 定义为:

$$L_{\text{FP}} = - \frac{\partial}{\partial x} h(x) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} k_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x} g_{\nu}(x),$$

其中 $g_1(x) = px, g_2(x) = -qx^2$, 下标 μ 和 ν 取 1, 2. 如果 $\mu = \nu, k_{\mu\nu} = 1$; 如果 $\mu \neq \nu, k_{\mu\nu} = \lambda$. 算符 L_{FP} 的共轭算符为:

$$L_{\text{FP}}^+ = h(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} k_{\mu\nu} g_{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x} g_{\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Fokker - Planck 方程(12)即是方程(6),所以稳态几率分布函数即是式(7). 由方程(9)及(11),有

$$\frac{dC(s)}{ds} = \frac{1}{\langle (\delta x)^2 \rangle_{st}} \langle f(t+s)x(t) \rangle_{st} + \langle x(t+s)\xi(t+s)x(t) \rangle_{st} - \langle x^2(t+s)\eta(t+s)x(t) \rangle_{st}$$

$$f(x) = ax - bx^2 - \frac{p}{2}x + \frac{3}{2}\lambda pqx^2 - qx^3,$$

根据 Novikov 定理^[15]及 Stratonovich 随机积分,借助 Fokker - Planck 算符 L_{FP} 的共轭算符 L_{FP}^+ , 上式可约化为:

$$\frac{dC(s)}{ds} = \frac{1}{\langle (\delta x)^2 \rangle_{st}} \langle x(t)L_{\text{FP}}^+(s)x(t+s) \rangle_{st},$$

这里采用 Stratonovich 的近似处理^[16],即

$$\frac{\langle x(t)L_{\text{FP}}^+(s)x(t+s) \rangle_{st}}{\langle x(t)L_{\text{FP}}^+x(t) \rangle_{st}} = \frac{\langle x(t+s) \rangle_{st} - \langle x(t) \rangle_{st}^2}{\langle (\delta x)^2 \rangle_{st}},$$

我们得到稳态关联函数

$$C(s) = \exp(-\gamma s). \quad (13)$$

显然 $C(s)$ 随着时间 s 的增加其衰减快慢依赖于 γ 因子. 因子 γ 反映了关联函数衰减的快慢. γ 越大, $C(s)$ 衰减越快. 而相应 $C(s)$ 的弛豫时间为:

$$T_c = \int_0^{\infty} C(s) ds = \gamma^{-1}.$$

稳态关联函数 $C(s)$ 的衰减速率

$$\gamma = \frac{\langle (\delta x)^2 \rangle_{st}}{b \langle x^3 \rangle_{st} - a \langle x^2 \rangle_{st}}. \quad (14)$$

3 分析讨论

由于 γ 表达式(14)的复杂性,作用于系统上的噪声 p 和 q 之间的关联强度 λ 对态变量 x 的稳态关联函

数的影响不易看出,为此我们采用数值计算的方法,通过 γ 对 λ 的响应变化图形,分析讨论噪声关联强度 λ 对稳态关联函数 $C(s)$ 衰减的影响.

图1和图2是稳态关联函数衰减速率 γ 随噪声强度 q 的变化曲线,其中 λ 作为调制参数.图1显示,噪声 p 与 q 无关联($\lambda = 0$)时, γ 随 q 的增加先逐渐增大,在达到极大值后,然后减小,逐渐过渡到平稳下降,其变化曲线上出现单峰结构.这说明稳态下,噪声 q 的增加会使得态变量 x 涨落衰减速率发生翻转,衰减从快转为慢.当噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 存在关联耦合且处于负关联(即 $\lambda < 0$)状态时,在关联强度 λ 的影响下, γ 仍然呈现单峰结构,关联强度 λ 并未破坏这一变化趋势,然而关联度 λ 越强, γ 越大,两噪声间的负关联使得 $C(s)$ 衰减加速.而从图2中,我们看到,如果两噪声处于正关联状态(即 $\lambda > 0$)时, γ 随噪声强度 q 的增大会出现先减小后增大的变化,如果进一步增大 q , γ 又呈现峰结构.随着噪声关联强度 λ 的减小,其 γ 作为 q 的函数所呈现的“共振”效应减弱.从两图对比中,发现噪声的正关联效应破坏了 γ 的变化趋势,导致衰减速率 γ 产生了一个极小值,这意味着正关联会使稳态关联函数出现所谓的慢化现象. λ 越大, γ 能达到的最小值越小,即“谷”越深,弛豫时间 T_c 越大,慢化现象越显著.而两噪声处于负关联时,无此现象.

为了进一步分析噪声正负关联对稳态函数的影响差异,我们在图3和图4中给出了衰减速率 γ 随噪声关联强度 λ 的变化曲线.图中清楚地表明,如果噪声强度一定,当 $p \geq q$ 时, γ 随着噪声关联强度 λ 从负关联

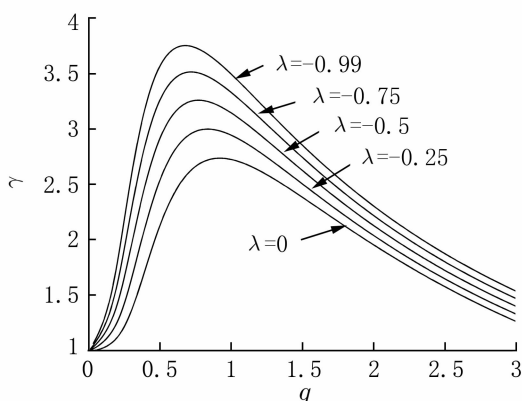


图1 衰减速率 γ 随噪声强度 q 的变化. $a = 1, b = 1, p = 1$

Fig. 1 The decay rate of the stationary correlation function γ versus q with $a = 1, b = 1, p = 1$

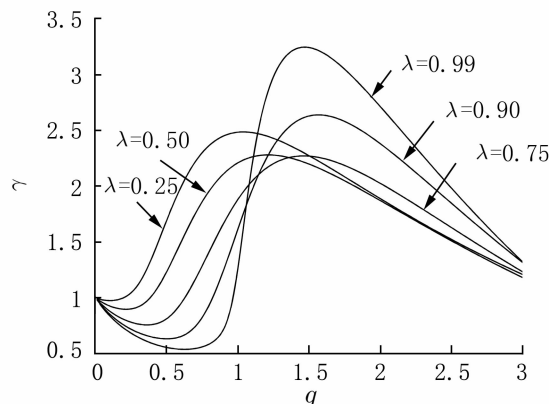


图2 衰减速率 γ 随噪声强度 q 的变化. $a = 1, b = 1, p = 1$

Fig. 2 The decay rate of the stationary correlation function γ versus q with $a = 1, b = 1, p = 1$

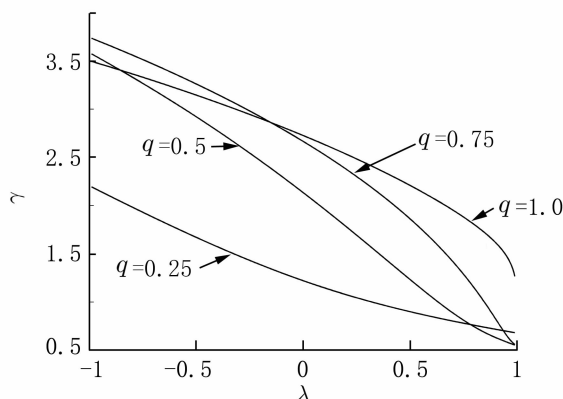


图3 衰减速率 γ 随噪声关联强度 λ 的变化. $a = 1, b = 1, p = 1$

Fig. 3 The decay rate of the stationary correlation function γ versus λ with $a = 1, b = 1, p = 1$

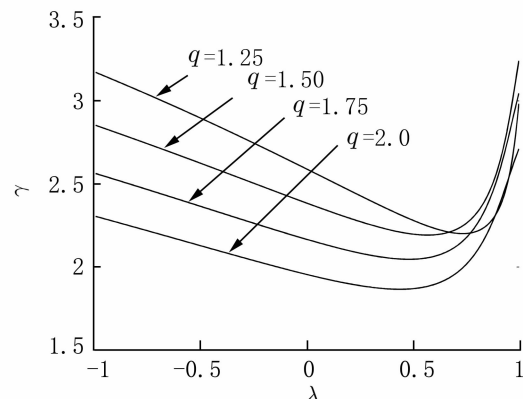


图4 衰减速率 γ 随噪声关联强度 λ 的变化. $a = 1, b = 1, p = 1$

Fig. 4 The decay rate of the stationary correlation function γ versus λ with $a = 1, b = 1, p = 1$

到正关联的变化在减小, λ 总是导致稳态关联 $C(s)$ 的衰减趋缓;而当 $q > p$ 时,两噪声的处于负关联时, γ 随 λ 增加也是变小,但正关联效应却会使得 γ 上升,呈现一极小值,稳态关联 $C(s)$ 衰减出现慢化.

参考文献:

- [1] LEUNG H K. Critical slowing down a noise – induced transition point [J]. Phys Rev A, 1988, 37: 1 341-1 344.
- [2] JACKSON P J, LAMBERT C J, MANNELLA R, et al. Relaxation near a noise – induced transition point [J]. Phys Rev A, 1989, 40: 2 875-2 878.
- [3] MANNELLA R, LAMBERT C J, STOCKS N G, et al. Relaxation of nonlinear systems driven by colored noise: An exact result [J]. Phys Rev A, 1990, 41: 3 016-3 020.
- [4] FULINSKI A, TELEJKO T. On the effect of interference of additive and multiplicative noise [J]. Phys Lett A, 1991, 152(1/2): 11-14.
- [5] WU D J, CAO L, KE S Z. Bistable kinetic model driven by correlated noises: Steady – state analysis [J]. Phys Rev E, 1994, 50: 2 496-2 502.
- [6] XIE C W, MEI D C. Mean first – passage time of a bistable kinetic model driven by multiplicative colored noise and additive white noise [J]. Chin Phys Lett, 2003, 20(6): 813-816.
- [7] 于占东, 赵自保, 曾春华, 等. 色关联噪声驱动双稳系统平均首通时间的研究 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(5): 493-498.
- [8] JIA Y, YU S N, LI J R. Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise [J]. Phys Rev E, 2000, 62: 1 869-1 878.
- [9] 汪志云, 陈培杰, 张良英. 含频率噪声信号对单模激光损失模型随机共振的影响 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2011, 33(6): 667-671.
- [10] AI B Q, WANG X J, LIU G T, et al. Correlated noise in a logistic growth model [J]. Phys Rev E, 2003, 67: 022903(1) – (3).
- [11] GORA P F. Stationary distributions of a noisy logistic process [J]. Acta Phys Pol B, 2005, 36: 1 981-1 995.
- [12] MAO X, MARION G, RENSHAW E, et al. Environmental Brownian noises suppresses explosion in population dynamics [J]. Stochastic Process Appl, 2002, 97: 95-110.
- [13] GORA P F. The logistic equation and a linear stochastic resonance [J]. Acta Phys Pol B, 2004, 35: 1 583-1 595.
- [14] GORA P F. Population explosion suppressed by noise: stationary distributions and how to simulate them [J]. New J Phys, 2005, 7: 36-45.
- [15] XIE C W, MEI D C. Effects of cross – correlated noises on the relaxation time of the bistable system [J]. Chin Phys, 2003, 12(11): 1 208-1 212.
- [16] HERNANDEZ – MACHADO A, MIGUEL M S, SANCHO J M. Relaxation time of processes driven by multiplicative noise [J]. Phys Rev A, 1984, 29: 3 388-3 396.

On stationary correlation function of a noisy Logistic model

CHEN Li-li¹, HE Ying-mei², XIE Chong-wei²

(1. Faculty of Continuing Education, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;

2. School of Physical Science and Technology, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: The stationary correlation function and the associated decay rate for a Logistic model with correlated Gaussian white noises have been derived by virtue of a Stratonovich – like ansatz. The effects of correlated noises on the stationary correlation function have been studied. Negative correlations between the noises always speed up the decay of the stationary correlation function. Positive correlations between the noises can cause a minimum of the decay rate of the stationary correlation function.

Key words: correlated noise; Logistic model; stationary correlation function