云南大学学报（自然科学版），2010，32（2）：125～129　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的特征值界的估计*1

李艳艳，李耀堂
（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650091）

摘要：给出非负矩阵 A 与 B 的 Hadamard 积 $A\circ B$ 的谱半径上界的一个新估计式和非奇异 M－矩阵 A 和 B 的 Fan 积 $A*B$ 的最小特征值下界的一个新估计式，这 2 估计式只依赖于矩阵 A 与 B 的元素，易于计算. 例证表明，所得估计式在一定条件下比现有估计式更为精确.

关键词：非负矩阵；M－矩阵；Hadamard 积；Fan 积；谱半径；最小特征值.
中图分类号：O 151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2010)02－0125－05

矩阵的 Hadamard 积和 Fan 积是 2 种特殊的矩阵乘积，它们被广泛地应用于周期函数卷积的三角矩阵、积分方程核的积、概率论中特征函数的研究和偏微分方程中弱极小原理、组合论中结合方案及算子理论中无限矩阵的 Hadamard 积等方面的研究中. 在这些研究中，非负矩阵 Hadamard 积的谱半径 $\rho(A\circ B)$ 的上界估计和非奇异 M－矩阵 Fan 积的最小特征值的下界估计受到许多学者的关注和研究，得到了这些上界和下界的一系列估计式[1-11]. 然而，在这些估计式中，或涉及到非负矩阵 A 和 B 的谱半径的计算，或涉及到 M－矩阵 A 和 B 的最小特征值的计算，当矩阵的阶数较大时这是难以实现的. 本文继续这些界的研究，分别给出非负矩阵 Hadamard 积的谱半径 $\rho(A\circ B)$ 的上界新的估计式和非奇异 M－矩阵 Fan 积的最小特征值 $q(A*B)$ 的新的下界估计式，这些估计式只涉及矩阵 A 与 B 的元素，易于计算，而且在一定条件下新的估计式比现有估计式的估计更为精确.

1　预备知识

为叙述方便，引入以下定义及记号（参见文献[1]）.

用 $C^{n\times n}$（$R^{n\times n}$）表示 $n\times n$ 复（实）矩阵集，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|,\quad d_i=\frac{R_i}{|a_{ii}|},\quad i\in N;$$

$$m_{ji}=|a_{ji}|h_j,\quad h_j=\begin{cases}d_j, & d_j\neq 0,\\ 1, & d_j=0;\end{cases}$$

$$m_i=\max_{j\neq i}\{m_{ji}\},\quad i,j\in N.$$

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果 $a_{ij}\geqslant 0\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为非负矩阵，记为 $A\geqslant 0$；若 $a_{ij}>0\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为正矩阵，记为 $A>0$.

定义 2　由矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 组成的集合称为 A 的谱，记为 $\sigma(A)$，即 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 矩阵 A 的 n 个特征值的模的最大值称为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$，即 $\rho(A)=\max_i\{|\lambda_i|,i\in N\}$.

---

*　**收稿日期**：2009－07－02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10961027).
作者简介：李艳艳(1982－)，女，甘肃人，硕士生，主要从事矩阵理论及其应用方面的研究.
通讯作者：李耀堂(1958－)，男，陕西人，教授，博士生导师，主要从事数值计算及其应用方面的研究.

引理1[1] 设矩阵 A 是 n 阶非负矩阵,则 A 的谱半径 $\rho(A)$ 是 A 的一个特征值,即 $\rho(A) \in \sigma(A)$.

定义3 记 $Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}: a_{ij} \leqslant 0, i \neq j; i,j = 1,\cdots,n\}$,则称 $Z^{n\times n}$ 中的矩阵 A 为 Z 矩阵(简记为 $A \in Z^{n\times n}$).

定义4 设 $A = (a_{ij}) \in Z^{n\times n}$,如果 A 可表示为 $A = \alpha I - P$,其中 $P \geqslant 0, \alpha \geqslant \rho(P)$,则称 A 为 M - 矩阵. 特别,当 $\alpha > \rho(P)$ 时,称 A 为非奇异 M - 矩阵;当 $\alpha = \rho(P)$ 时,称 A 为奇异 M - 矩阵.

用 M_n 表示非奇异 M - 矩阵的集合.

定义5 设 $A = (a_{ij}) \in Z^{n\times z}$,记 $q(A) = \min\{\mathrm{Re}(\lambda): \lambda \in \sigma(A)\}$,称 $q(A)$ 为 A 的最小特征值.

引理2[2] 设 $A \in M_n$, $q(A)$ 为 A 的最小特征值, $\rho(A^{-1})$ 是非负矩阵 A^{-1} 的 Perron 特征值,则 $q(A) = \dfrac{1}{\rho(A^{-1})}$,且 $q(A) > 0$.

定义6 设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in C^{m\times n}$,用 $A \circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m \times n$ 矩阵

$$A \circ B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}.$$

$A \circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 积.

定义7 设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in C^{m\times n}, c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}b_{ii}, j = i, \\ -a_{ij}b_{ij}, j \neq i, \end{cases}$ 记 $A * B = (c_{ij}) \in C^{m\times n}$,称其为 A 和 B 的 Fan 积.

2 非负矩阵 A,B 的 Hadamard 积的谱半径的上界估计

本节给出 $\rho(A \circ B)$ 的一个新的上界估计式. 首先,给出一些关于特征值包含域的引理和定理.

引理3[2] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,则 A 的特征值位于下列区域:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in C: |z - a_{ii}| \leqslant [\sum_{j\neq i} |a_{ij}|]^{\alpha}[\sum_{j\neq i} |a_{ji}|]^{1-\alpha}\}.$$

引理4[2] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,则 A 的特征值位于下列区域:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in C: |z - a_{ii}| \leqslant \alpha \sum_{j\neq i} |a_{ij}| + (1-\alpha) \sum_{j\neq i} |a_{ji}|\}.$$

引理5[3] 设 n 阶矩阵 $A \geqslant 0$,则下列结论之一成立:

(1) A 不可约;

(2) 存在置换矩阵 P,使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_2 & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 A_i 或不可约或为 $0, i = 1,\cdots,k$.

引理6[3] 设 $A \in R^{n\times n}$,如果 A 有形如(1)式的不可约标准形,则

$$\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma(A_i), \rho(A) = \max\{\rho(A_i): i = 1,\cdots,k\}.$$

定理1 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,且 $x_1,\cdots,x_n$ 是正实数. 则 A 的特征值位于下列区域:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{z \in C: |z - a_{ii}| \leqslant [\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq 1} x_j |a_{ij}]^{\alpha}[x_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{x_j} |a_{ji}|]^{1-\alpha}\right\}.$$

证明 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是正实数,定义 $X = \mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$, $H = X^{-1}AX = (h_{ij})$,则

$$h_{ij}=\begin{cases}a_{ii}, i=j,\\ \dfrac{x_j}{x_i}a_{ij}, i\neq j.\end{cases}$$

因为 A,H 相似，所以 $\sigma(A)=\sigma(H)$，由引理 3 知 A 的特征值位于下列区域：

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in C:|z-h_{ii}|\leqslant[\sum_{j\neq 1}|h_{ij}|]^{\alpha}[\sum_{j\neq i}|h_{ji}|]^{1-\alpha}\},$$

即

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\leqslant[\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}x_j|a_{ij}|]^{\alpha}[x_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j}|a_{ji}|]^{1-\alpha}\right\}.$$

证毕.

应用引理 4 类似于定理 1 的证明，容易得到如下定理 2.

定理 2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，且 $x_1,\cdots,x_n$ 是正实数. 则 A 的特征值位于下列区域：

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\leqslant\alpha(\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq 1}x_j|a_{ij}|)+(1-\alpha)(x_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j}|a_{ji}|)\right\}.$$

下面讨论 $\rho(A\circ B)$ 的上界. 1985 年，R. A. Horn 等在文献[4]中给出了如下结论：若 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，且 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$，则

$$\rho(A\circ B)\leqslant\rho(A)\rho(B).\tag{2}$$

2007 年，M. Z. Fang 在文献[5]中给出了 $\rho(A\circ B)$ 的上界的一个估计式

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(A)\rho(B)-a_{ii}\rho(B)-b_{ii}\rho(A)\}.\tag{3}$$

2008 年，R. Huang 在文献[6]中给出了 $\rho(A\circ B)$ 的一个上界估计式

$$\rho(A\circ B)\leqslant(1+\rho(J'_A)\rho(J'_B))\max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ii}b_{ii}),\tag{4}$$

其中 J'_A,J'_B 表示 A,B 的 Jacobi 迭代矩阵.

2009 年，Q. B. Liu 等在文献[7]中给出了 $\rho(A\circ B)$ 的一个新的上界估计式

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}+b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(\rho(A)-a_{ii})(\rho(B)-b_{ii})(\rho(A)-a_{jj})(\rho(B)-b_{jj})]^{1/2}\}.\tag{5}$$

在上述估计式中涉及到非负矩阵 A 和 B 的谱半径 $\rho(A)$ 和 $\rho(B)$ 的计算，当矩阵的阶数较大时这是难以实现的. 下面给出 $\rho(A\circ B)$ 的一个只涉及矩阵 A 与 B 的元素的上界估计式.

定理 3　设 $A,B\in R^{n\times n}$，且 $A,B\geqslant 0$. 则

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+\frac{1}{2}[\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}m_ja_{ij}b_{ij}+m_i\sum_{j\neq i}\frac{b_{ji}}{h_j}]\right\}.$$

证明　设 $C=A\circ B$，首先考虑 C 不可约的情况. 此时 A,B 也不可约，设 λ 是 C 的特征值，且满足 $\lambda=\rho(C)$，由定理 2 知，存在 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得

$$|\lambda-a_{ii}b_{ii}|\leqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}m_j|a_{ij}b_{ij}|)+\frac{1}{2}(m_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{m_j}|a_{ji}b_{ji}|),$$

即

$$\begin{aligned}\lambda&\leqslant a_{ii}b_{ii}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}m_j|a_{ij}b_{ij}|+\sum_{j\neq i}\frac{1}{m_j}|a_{ji}\|b_{ji}|\right)\leqslant\\ &a_{ii}b_{ii}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}m_ja_{ij}b_{ij}+m_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{|a_{ji}|h_j}|a_{ji}\|b_{ji}|\right)\leqslant\\ &a_{ii}b_{ii}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}m_ja_{ij}b_{ij}+m_i\sum_{j\neq i}\frac{b_{ji}}{h_j}\right)\leqslant\\ &\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}m_ja_{ij}b_{ij}+m_i\sum_{j\neq i}\frac{b_{ji}}{h_j}\right]\right\}.\end{aligned}$$

当 C 可约时,可设 C 有块上三角形式(1)且每一对角块不可约,$C_i = A \circ B_i$,$i = 1,\cdots,k$,其中 A_i,B_i 仍不可约,由引理6知

$$\rho(A \circ B) = \max_i \rho(A_i \circ B_i).$$

由此得定理2结论成立. 证毕.

例1 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

应用估计式(2),得 $\rho(A \circ B) \leqslant \rho(A)\rho(B) = 50.1274$;

应用估计式(3),得 $\rho(A \circ B) \leqslant (1 + \rho J'_A)\rho(J'_B)) \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}b_{ii} = 39.7468$;

应用估计式(4),得 $\rho(A \circ B) \leqslant 25.5364$;

应用估计式(5),得 $\rho(A \circ B) \leqslant 25.3644$;

应用本文定理3所得估计式,得 $\rho(A \circ B) \leqslant 21.0333$. 事实上,$\rho(A \circ B) \leqslant 20.7439$.

注1 上述计算结果表明定理3的估计式比现有结果更为精确. 更重要的是这个估计式仅依赖于矩阵 A,B 的元素,这样计算起来要容易的多.

3 M - 矩阵 A,B 的 Fan 积的最小特征值的下界的估计

下面讨论 M - 矩阵 A,B 的 Fan 积 $A * B$ 的最小特征值 $q(A * B)$ 的下界估计式.

1991年,R. A. Horn 等在文献[2]中给出如下经典结果:若 A,B 是 M - 阵,则

$$q(A * B) \geqslant q(A)q(B). \tag{6}$$

2007年,M. Z. Fang 在文献[5]中给出了 $q(A * B)$ 的一个下界估计式

$$q(A * B) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_{ii}q(B) + b_{ii}q(A) - q(A)q(B)\}. \tag{7}$$

2008年,R. Huang 在文献[6]中给出了 $q(A * B)$ 的一个估计式

$$q(A * B) \geqslant (1 - \rho(J_A)\rho(J_B)) \min_i (a_{ii}b_{ii}). \tag{8}$$

2009年,Q. B. Liu 等在文献[7]中给出了 $q(A * B)$ 的一个新的下界估计式

$$q(A * B) \geqslant \min_{i \neq j} \frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4(a_{ii} - q(A))(b_{ii} - q(B))(a_{jj} - q(A))(b_{jj} - q(B))]^{1/2}\}. \tag{9}$$

在上述估计式中涉及到非奇异 M - 矩阵 A 和 B 的最小特征值 $q(A)$ 和 $q(B)$ 的计算,当矩阵的阶数较大时这是难以实现的. 下面给出 $q(A * B)$ 的一个只涉及矩阵 A 与 B 的元素的下界估计式.

定理4 设 $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是非奇异 M - 矩阵. 则

$$q(A * B) \geqslant \min_i \left\{a_{ii}b_{ii} - \left[\sum_{j \neq i} m_j |a_{ij}b_{ij}| \sum_{j \neq i} \frac{b_{ji}}{h_j}\right]^{1/2}\right\}. \tag{10}$$

证明 显然,当 $n = 1$ 时,(10)式成立. 所以假设 $n \geqslant 2$,分2种情况证明.

(1)$A * B$ 不可约:此时 A,B 不可约. 设 λ 是 $A * B$ 的特征值且满足 $q(A * B) = \lambda$. 由定理1知,存在 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$,使

$$|\lambda - a_{ii}b_{ii}| \leqslant \left[\frac{1}{m_i}\sum_{j \neq i} m_j |a_{ij}b_{ij}|\right]^{1/2}\left[m_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{m_j} |a_{ji}b_{ji}|\right]^{1/2}$$

即

$$\lambda \geqslant a_{ii}b_{ii} - \left[\frac{1}{m_i}\sum_{j \neq i} m_j |a_{ij}b_{ij}|\right]^{1/2}\left[m_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{m_j} |a_{ji}b_{ji}|\right]^{1/2} \geqslant$$

$$a_{ii}b_{ii} - \left[\sum_{j \neq i} m_j |a_{ij}b_{ij}|\right]^{1/2}\left[\sum_{j \neq i} \frac{1}{|a_{ji}| h_j} |a_{ji}b_{ji}|\right]^{1/2} =$$

$$a_{ii}b_{ii} - \left[\sum_{j\neq i} m_j \mid a_{ij}b_{ij} \mid \sum_{j\neq i} \frac{\mid b_{ji} \mid}{h_j}\right]^{1/2} \geqslant$$
$$\min_i\left\{a_{ii}b_{ii} - \left[\sum_{j\neq i} m_j \mid a_{ij}b_{ij} \mid \sum_{j\neq i} \frac{\mid b_{ji} \mid}{h_j}\right]^{1/2}\right\}.$$

(2)$A * B$ 可约:Z_n 中的矩阵是非奇异 M - 矩阵的充要条件是它的所有顺序主子式为正. 令 $T = (t_{ij})$ 是 $n \times n$ 阶的置换矩阵,且

$$t_{12} = t_{23} = \cdots = t_{n-1,n} = t_{n1} = 1,$$

其余的 $t_{ij} = 0$. 则对于任意的 $\varepsilon > 0$,当 ε 充分小时使 $A + \varepsilon T, B + \varepsilon T$ 的所有主子式为正,从而 $A + \varepsilon T, B + \varepsilon T$ 是非奇异 M - 矩阵,若用 $A + \varepsilon T, B + \varepsilon T$ 代替 A, B,并令 $\varepsilon \to 0$,由连续性知(10) 式仍然成立.

证毕.

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}.$

应用估计式(6),得 $q(A * B) \geqslant 0.191$;

应用估计式(7),得 $q(A * B) \geqslant 1.573$;

应用估计式(8),得 $q(A * B) \geqslant 0.180\,8$;

应用估计式(9),得. $q(A * B) \geqslant 1.573$;

应用本文定理 4 所得估计式,得 $q(A * B) \geqslant 2.433\,4$. 事实上,$q(A * B) = 3.229\,6$.

注 2 上述计算结果表明,定理4 的估计式比现有结果更为精确,且这个估计式仅依赖于矩阵 A,B 的元素,更易于计算.

参考文献:

[1] 陈景良,陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京:清华大学出版社,2000.
[2] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in matrix analysis[M]. New York:Cambridge University Press,1991.
[3] BERMAN A, PLEMONS R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York:Academic Press,1979.
[4] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in matrix analysis[M]. New York:Cambridge University Press,1985.
[5] FANG M Z. Bounds on eigenvalue of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl,2007,425:7-15.
[6] HUANG R. Some inequalities for the Hadamard product and Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl,2008,428:1 551-1 559.
[7] LIU Q B, CHEN G L. On two inequalities for the Hadamard product and Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2009.03.049. doi:10.1016/j. laa.
[8] 孙丽英,许兴业. H - 矩阵的刻化及一类实矩阵逆的上下界估计[J]. 云南大学学报:自然科学版,2005,27(4):15-18.
[9] 游兆永. 非奇异 M - 矩阵[M]. 武汉:武汉工学院出版社,1981.
[10] 袁晖坪. 关于行(列)反对称矩阵的 Schur 分解[J]. 云南大学学报:自然科学版,2008,30(6):549-552.
[11] 黄廷祝,杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京:科学出版社,2007.

Bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices

LI Yan-yan, LI Yao-tang
(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: A new upper bound of the spectral radius of Hadamard product for nonnegative matrices, and a new lower bound of the minimum eigenvalue of Fan product for nonsingular M - matrices, are given. The estimating formulas of the bounds are easier to calculate since they only depend on the entries of matrices A and B. The given numerical examples show that estimating formulas of the bounds are better than several known estimating formulas.

Key words: nonnegative matrix; M - matrix; Hadamard product; Fan product; spectral radius; smallest eigenvalue.