

## 准坐标下一般完整系统 Nielsen 方程的

Mei 对称性导致的 Mei 守恒量<sup>\*1</sup>杨新芳<sup>1</sup>, 贾利群<sup>1</sup>, 张耀宇<sup>2</sup>, 崔金超<sup>3</sup>, 解银丽<sup>1</sup>

(1. 江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122; 2. 平顶山学院 电气信息工程学院, 河南 平顶山 467002;

3. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081)

**摘要:**研究准坐标下一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量. 给出一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性的定义和判据, 讨论一般完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的条件及 Mei 守恒量的形式, 并举例说明结果的应用.

**关键词:**准坐标, Nielsen 方程, Mei 对称性, Mei 守恒量

**中图分类号:**O 316 **文献标识码:**A **文章编号:**0258-7971(2010)03-0304-04

约束力学系统的对称性和守恒量的研究, 是当今分析力学领域的一个重要研究方向. 1999 年以来, 约束力学系统的对称性和守恒量的研究发展很快<sup>[1-14]</sup>. Nielsen 体系是分析力学中三大力学体系之一<sup>[15]</sup>, 在分析力学中占有重要地位. 近年, Nielsen 方程的对称性和守恒量的研究也取得了一些进展. 文献[16]研究了 Nielsen 方程的 Mei 对称性, 文献[17]将其推广到变质量非完整系统中, 文献[18~19]分别研究了单面 Chetaev 型非完整系统和非 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

在分析力学中常用准坐标来研究力学问题, 因为用准坐标表示力学系统的运动微分方程有 2 个重要的优点<sup>[20]</sup>: 第一, 在准坐标中, 非完整约束条件写起来非常简单; 第二, 力学系统的运动方程具有完全单一的结构, 不依赖于完整与否. 近几年, 准坐标下约束力学系统对称性和守恒量的研究也取得了一些成果. 文献[21]研究了准坐标下一般完整系统的对称性和守恒量. 但是, 准坐标下 Nielsen 方程的对称性和守恒量的研究甚少. 文献[11]研究了非完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性与 Mei

守恒量, 本文在此基础上, 研究准坐标下一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 首先, 给出了 Mei 对称性的定义和判据. 此外, 通过对 Mei 对称性的研究得到了由 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的条件和 Mei 守恒量的表达式. 最后, 举例说明结论的应用.

## 1 准坐标下系统的运动微分方程

设完整力学系统的位形由  $n$  个坐标  $q_s (s=1, \dots, n)$  确定, 其 Lagrange 函数与非势广义力函数分别为  $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  和  $Q_i = Q_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) (s=1, \dots, n)$ . 引进  $n$  个彼此独立相容的准速度  $\omega_s$ , 且  $\omega_s$  为  $t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  的函数,

$$\omega_s = \omega_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = a_{sk}(\mathbf{q}) q_k \quad (s=1, \dots, n), \quad (1)$$

并由假设可反解出广义速度记为

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = b_{sk}(\mathbf{q}) \omega_k \quad (s=1, \dots, n), \quad (2)$$

系统的 Lagrange 函数  $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  用准速度

\* 收稿日期: 2009-09-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572021); 江南大学预研基金资助项目(2008LYY011).

作者简介: 杨新芳(1983-), 女, 山东人, 硕士生, 主要从事一般力学和应用数学方面的研究.

通讯作者: 贾利群(1953-), 男, 河北人, 教授, 主要从事一般力学和应用数学方面的研究, E-mail: jllq0000@163.com.

可表示为  $\bar{L} = \bar{L}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}))$ .

定义 Nielsen 算子

$$N_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} - 2 \frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (3)$$

把  $\dot{q}_s$  用准速度表示,则准坐标形式的 Nielsen 算子

$$\bar{N}_s = \frac{\partial}{\partial \omega_s} \frac{d}{dt} - 2 \frac{\partial}{\partial \pi_s} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (4)$$

则系统 Nielsen 形式的运动微分方程在准坐标下可表示为

$$\frac{\partial}{\partial \omega_s} \frac{d\bar{L}}{dt} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega_k} r_{rs}^k \omega_r - 2 \frac{\partial \bar{L}}{\partial \pi_s} = \bar{P}_s \quad (s = 1, \dots, n), \quad (5)$$

其中

$$\bar{L}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})), \quad \frac{\partial}{\partial \pi_s} = b_{ks} \frac{\partial}{\partial q_k}$$

$$r_{rs}^k = \left( \frac{\partial \alpha_{km}}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial q_m} \right) b_{lr} b_{ms}, \quad \bar{P}_s = Q_k b_{ks}. \quad (6)$$

利用(4)式,系统 Nielsen 形式的运动微分方程在准坐标下可用 Nielsen 算子表示为

$$\bar{N}_s(\bar{L}) + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega_k} r_{rs}^k \omega_r = \bar{P}_s \quad (s = 1, \dots, n). \quad (7)$$

如果  $\det\left(\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \omega_s \partial \omega_k}\right) \neq 0$  即系统非奇异,则由方程(5)可解出所有  $\dot{\omega}_s$ , 记为

$$\dot{\omega}_s = \alpha_s(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (8)$$

## 2 Mei 对称性的定义和判据

引进时间和准坐标的群的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, \quad \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \Delta \pi_s \quad (s = 1, \dots, n), \quad (9)$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}), \quad \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (10)$$

其中  $\varepsilon$  为无限小参数,  $\xi_0$  和  $\xi_s$  为无限小生成元.

假设在无限小变换(10)下准速度表示的 Lagrange 函数  $\bar{L} = \bar{L}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$ , 变为  $\bar{L}^*(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = \bar{L}(t^*, \mathbf{q}^*, \boldsymbol{\omega}^*)$ , 非势广义力  $\bar{P}_s(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$  变为  $\bar{P}_s^*(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = \bar{P}_s(t^*, \mathbf{q}^*, \boldsymbol{\omega}^*)$ . 将  $\bar{L}^*(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$ ,  $\bar{P}_s^*(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$  在  $(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$  处作 Taylor 级数展开, 并利用(8)有

$$\bar{L}^* = \bar{L}(t^*, \mathbf{q}^*, \boldsymbol{\omega}^*) = \bar{L}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) + \varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{L}) + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{P}_s^* = \bar{P}_s(t^*, \mathbf{q}^*, \boldsymbol{\omega}^*) = \bar{P}_s(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) +$$

$$\varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_s) + O(\varepsilon^2) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (11)$$

其中

$$\bar{X}^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial \pi_s} + \left( \frac{d}{dt} \xi_s - \omega_s \frac{d}{dt} \xi_0 - r_{rk}^s \omega_r \xi_k \right) \frac{\partial}{\partial \omega_s},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_s \frac{\partial}{\partial \pi_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \omega_s}. \quad (12)$$

**定义** 如果用经(10)变换后的动力学函数  $\bar{L}^*$ ,  $\bar{P}_s^*$  分别代替  $\bar{L}$  和  $\bar{P}_s$  后, 方程(7)的形式保持不变, 则称这种不变性为准坐标下一般完整系统的 Mei 对称性, 根据上述定义, 有

$$\bar{N}_s(\bar{L}^*) + \frac{\partial \bar{L}^*}{\partial \omega_k} r_{rs}^k \omega_r = \bar{P}_s^* \quad (s = 1, \dots, n). \quad (13)$$

将(11)式代入(13)式, 忽略  $\varepsilon^2$  及更高阶项. 利用(5)得

$$\bar{N}_s[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] + \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_k} r_{rs}^k \omega_r = \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_s) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (14)$$

在应用(14)时将(8)代入, 因此(14)可改为

$$\tilde{N}[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] + \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_k} r_{rs}^k \omega_r = \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_s) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (15)$$

其中

$$\tilde{N} = \frac{\partial}{\partial \omega_s} \frac{d}{dt} - 2 \frac{\partial}{\partial \pi_s} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (16)$$

于是有:

**判据** 对准坐标下的非奇异的一般完整系统的 Nielsen 方程(5), 如果变换(10)的无限生成元  $\xi_0, \xi_s$  满足方程(15), 则相应的不变性为一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性.

称方程(15)为准坐标下非奇异的一般完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性的判据方程.

## 3 Mei 对称性导致 Mei 守恒量

准坐标下非奇异的一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性可直接导致 Mei 守恒量. 下面的命题给出其条件及守恒量的形式.

**命题** 如果准坐标下非奇异的一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性的生成元  $\xi_0, \xi_s$  和规范函数  $G_M = G_M(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$  满足结构方程

$$\bar{X}^{(1)}[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] + \bar{X}^{(1)}(\bar{L}) \frac{d}{dt} \xi_0 + \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_s) (\xi_s - \omega_s \xi_0) + \frac{d}{dt} G_M = 0, \quad (17)$$

则系统的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量

$$I_M = \bar{X}^{(1)}(\bar{L})\xi_0 + \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s}(\xi_s - \omega_s \xi_0) + G_M = \text{const.} \quad (18)$$

**证明** 将(18)式按(12)式第 2 个方程对时间求导,并利用(17)得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt} I_M = & \left[ \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial t} + \omega_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + \alpha_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} \right] \xi_0 + \\ & \bar{X}^{(1)}(\bar{L}) \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 + \left[ \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} \right] (\xi_s - \omega_s \xi_0) + \\ & \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} \left( \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s - \alpha_s \xi_0 - \omega_s \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 \right) + \frac{\bar{d}}{dt} G_M = \\ & \xi_0 \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + \\ & \left( \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s - \omega_s \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 - r_{rs}^s \omega_r \xi_k \right) \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} - \\ & \xi_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + r_{rk}^s \omega_r \xi_k \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} + \xi_0 \omega_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + \\ & \xi_0 \alpha_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} + \bar{X}^{(1)}(\bar{L}) \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 + \left[ \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} \right] \cdot \\ & (\xi_s - \omega_s \xi_0) - \xi_0 \alpha_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} + \frac{\bar{d}}{dt} G_M = \\ & \bar{X}^{(1)}[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] - \xi_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + \\ & r_{rk}^s \omega_r \xi_k \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} + \xi_0 \omega_s \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + \\ & \bar{X}^{(1)}(\bar{L}) \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 + \left[ \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_s} \right] (\xi_s - \omega_s \xi_0) + \\ & \frac{\bar{d}}{dt} G_M = \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial \omega_s} \frac{\bar{d} \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{dt} - 2 \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \pi_s} + \right. \\ & \left. r_{rs}^k \omega_r \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_k} - \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_s) \right] \cdot \\ & (\xi_s - \omega_s \xi_0) + r_{rs}^k \omega_r \omega_s \xi_0 \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_k}, \end{aligned}$$

利用(6)中的 Boltzmann 符号  $r_{rs}^k$  的反对称性,则有

$$r_{rs}^k \omega_r \omega_s \xi_0 \frac{\partial \bar{X}^{(1)}(\bar{L})}{\partial \omega_k} = 0.$$

再利用(5)式和(15)式,可得

$$\frac{\bar{d}}{dt} I_M = 0$$

## 4 算例

设二自由度力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2,$$

$$Q_1 = 0, Q_2 = Q_2(t, \mathbf{q}_1). \quad (19)$$

取准速度

$$\omega_1 = q_1 \dot{q}_1, \omega_2 = \dot{q}_2, \quad (20)$$

试在准坐标下研究一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量.

利用(1),(2)和(6)式计算得

$$a_{11} = q_1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 1,$$

$$b_{11} = \frac{1}{q_1}, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 1,$$

$$r_{rs}^k = 0, (k, r, s = 1, 2),$$

$$\bar{L} = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + q_1^2, \bar{P}_1 = 0, \bar{P}_2 = Q_2(t, \mathbf{q}_1).$$

则方程(8)给出的准坐标下的系统的运动微分方程

$$\dot{\omega}_1 = 2, \dot{\omega}_2 = Q_2(t, \mathbf{q}_1), \quad (21)$$

取生成元

$$\xi_0 = \xi_2 = 0, \xi_1 = \omega_1, \quad (22)$$

做计算得

$$\bar{X}^{(1)}(\bar{L}) = 4\omega_1, \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_1) = \bar{X}^{(1)}(\bar{P}_2) = 0,$$

$$\bar{N}_1[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] = \bar{N}_2[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] = 0,$$

$$\bar{X}^{(1)}[\bar{X}^{(1)}(\bar{L})] = 8,$$

由判据方程(15)容易验证生成元(22)是准坐标下系统 Mei 对称性的生成元. 结构方程(17)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt} G_M = -8,$$

利用(18)式可得准坐标下一般完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$I_M = 4\omega_1 - 8t = \text{const.} \quad (23)$$

## 参考文献:

- [1] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [2] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.
- [3] 罗绍凯, 张永发. 约束力学系统研究进展[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [4] 方建会, 薛庆忠, 赵嵩卿. 非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性[J]. 物理学报, 2002, 51(10): 2 183-2 185.

- [5] ZHANG Hong-bin, GU Shu-long. Lie symmetries and conserved quantities of Birkhoff systems with unilateral constraints[J]. Chinese Physics B, 2002, 11(8): 765-770.
- [6] XU Xue-jun, MEI Feng-xiang, QIN Mao-chang. Non-Noether conserved quantity constructed by using form invariance for Birkhoffian system [J]. Chin Phys B, 2004, 13(12): 1999-2002.
- [7] CHEN Xiang-wei, LI Yan-min, ZHAO Yong-hong. Lie symmetries, Perturbation to symmetries and adiabatic invariants of Lagrange system [J]. Physics Letters A, 2005, 337: 274-278.
- [8] 张毅, 葛伟宽. 相对论性力学系统 Mei 对称性导致的新守恒律[J]. 物理学报, 2005, 54(4): 1464-1467.
- [9] LUO Shao-kai, CHEN Xiang-wei, GUO Yong-xin. Lie symmetrical perturbation and adiabatic invariants of generalized Hojman type for Lagrange systems [J]. Chin Phys, 2007, 16(11): 3176-3181.
- [10] JIA Li-qun, XIE Jia-fang, ZHENG Shi-wang. Structure equation and Mei conserved quantity for Mei symmetry of Appell equation [J]. Chin Phys B, 2008, 17(1): 17-22.
- [11] 贾利群, 罗绍凯, 张耀宇. 非完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量[J]. 物理学报, 2008, 57(4): 2006-2010.
- [12] 贾利群, 崔金超, 张耀宇, 等. Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性和守恒量[J]. 物理学报, 2009, 58(1): 16-21.
- [13] 贾利群, 张耀宇, 崔金超. 完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(1): 52-56.
- [14] 崔金超, 贾利群, 杨新芳. Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量[J]. 河南师范大学学报, 2009, 37(2): 70-73.
- [15] 梅凤翔. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.
- [16] WANG Shu-yong, MEI Feng-xiang. On the form invariance of Nielsen equations [J]. Chin Phys B, 2001, 10(5): 373-375.
- [17] FANG Jian-hui, ZHAO Song-qing. Noether's theorem of a rotational relativistic variable mass system [J]. Chin Phys B, 2002, 11(5): 445-449.
- [18] JIA Li-qun, XIE Jia-fang, LUO Shao-kai. Mei symmetry and Mei conserved quantity of nonholonomic systems with unilateral Chetaev type in Nielsen style [J]. Chin Phys B, 2008, 17(5): 1560-1564.
- [19] CUI Jin-chao, ZHANG Yao-yu, JIA Li-qun. Mei conserved quantity of Nielsen equation for a non-Chetaev-type non-holonomic system [J]. Chin Phys B, 2009, 18(5): 1731-1736.
- [20] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985: 9.
- [21] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.

## Mei conserved quantity led by Mei symmetry of a Nielsen equation for a holonomic system in terms of quasi - coordinates

YANG Xin-fang<sup>1</sup>, JIA Li-qun<sup>1</sup>, ZHANG Yao-yu<sup>2</sup>, CUI Jin-chao<sup>3</sup>, XIE Yin-li<sup>1</sup>

(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi, 214122, China;

2. Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China;

3. School of Astronautics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Mei conserved quantity led by Mei symmetry of a Nielsen equation for a holonomic system in terms of quasi - coordinates was discussed. The definition and the criterion of Mei symmetry of a Nielsen equation for a holonomic mechanical system in terms of quasi - coordinates are given, and the condition and the form of the Mei conserved quantity deduced directly from the Mei symmetry of the Nielsen equation for a holonomic mechanical system are discussed. Finally, an example is given to illustrate the application of the results.

**Key words:** quasi - coordinate; Nielsen equation; Mei symmetry; Mei conserved quantity