云南大学学报（自然科学版），2009，31（1）：52～56　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量[*1]

贾利群[1,2]，张耀宇[2]，崔金超[1]
（1. 江南大学 理学院，江苏 无锡　214122；2. 平顶山学院 电气信息工程学院，河南 平顶山　467002）

摘要：研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量. 建立完整系统的 Appell 方程和系统的运动微分方程；在群的无限小变换下，给出完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据；得到用 Appell 函数表示的完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量的表达式. 举例说明结果的应用.

关键词：Appell 方程；Mei 对称性；结构方程；Mei 守恒量
中图分类号：O 316　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2009)01－0052－05

分析力学理论在近代依然在不断发展，其中 Appell 方程现在已发展成为分析力学理论中三大力学体系之一[1]，在分析力学理论中占有重要地位.

1918 年，德国女科学家 Noether A E 揭示了对称性与守恒量间的潜在关系[2]. 但是，直到 20 世纪 70 年代，分析力学界才认识到 Noether 理论的科学价值. 从此，关于对称性与守恒量的研究蓬勃发展[3,4]. 近年来，Mei 对称性的研究取得了一些成果[5～10]. 但是，长期以来对 Appell 方程的求解成果甚少[11]. 为寻找 Appell 方程的求解途径，梅凤翔首先由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了 Noether 守恒量[11]；李仁杰、乔永芬和孟军由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了变质量完整系统的守恒量[12]；罗绍凯由形式不变性分别通过 Noether 对称性和 Lie 对称性间接得到了转动相对论完整系统 Appell 方程的守恒量[13]，罗绍凯还由形式不变性通过 Lie 对称性间接得到了一般完整系统的守恒量[14]；文献[15]利用 Lagrange 函数与 A 函数的关系研究了 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 上述研究为寻找 Appell 方程的守恒量提供了新的思路，但却无法得到用 Appell 函数直接表示的结构方程和守恒量. 本文主要研究用 Appell 函数直接表示的完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量.

1　完整系统的 Appell 方程和运动微分方程

设完整力学系统由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定，第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义力 $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，系统的加速度能量 S 和 Appell 方程分别为

$$S=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}),\tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s,\ (s=1,2,\cdots,n).\tag{2}$$

（1）式和下文均采用 Einstein 求和约定. 利用方程（2）可解出所有广义加速度 —— 系统的运动微分方程

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\ (s=1,2,\cdots,n).\tag{3}$$

---

* **收稿日期**：2008－06－26
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10572021）；江南大学预研基金资助项目（2008LYY011）.
作者简介：贾利群（1953－　），男，河北人，教授，主要从事一般力学（分析力学）方面的研究.

2　完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$t^{*}=t+\Delta t,\ q_{s}^{*}(t^{*})=q_{s}(t)+\Delta q_{s},\ (s=1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

或其展开式

$$t^{*}=t+\varepsilon\xi_{0}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\ q_{s}^{*}(t^{*})=q_{s}(t)+\varepsilon\xi_{s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\ (s=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

其中,ε 为无限小参数 ξ_0,ξ_s,为无限小变换生成元.引进无限小变换生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_{0}\frac{\partial}{\partial t}+\xi_{s}\frac{\partial}{\partial q_{s}}$$

以及它的一次扩展和二次扩展

$$\tilde{X}^{(1)}=X^{(0)}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{s}}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_{s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{0}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{s}}, \tag{7}$$

$$\tilde{X}^{(2)}=\tilde{X}^{(1)}+\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{s}}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_{s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{0}}{\mathrm{d}t}\right)-\ddot{q}_{s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{0}}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_{s}}. \tag{8}$$

其中函数沿系统运动轨道曲线对时间 t 的全导数

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_{s}\frac{\partial}{\partial q_{s}}+\alpha_{s}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{s}}+\dot{\alpha}_{s}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}}. \tag{9}$$

由(5)式可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_{s}^{*}}{\mathrm{d}t^{*}}=\dfrac{\mathrm{d}q_{s}+\varepsilon\mathrm{d}\xi_{s}}{\mathrm{d}t+\varepsilon\mathrm{d}\xi_{0}}=\dot{q}_{s}+\varepsilon(\dot{\xi}-\dot{q}_{s}\dot{\xi}_{0})+O(\varepsilon^{2}),\\ \dfrac{\mathrm{d}^{2}q_{s}^{*}}{\mathrm{d}t^{*2}}=\ddot{q}_{s}+\varepsilon[(\dot{\xi}_{s}-\dot{q}_{s}\dot{\xi}_{0})^{\cdot}-\ddot{q}_{s}\dot{\xi}_{0}]+O(\varepsilon^{2}).\end{cases} \tag{10}$$

假设在经历无限小变换(5)后,系统的动力学函数 S 和 Q_s 分别变为 S^* 和 Q_s^*,将 S^* 和 Q_s^* 在$(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$处作 Taylor 级数展开,其中函数沿系统运动轨道曲线对时间 t 的全导数由(9)式表示.有

$$S^{*}=S\left(t^{*},\boldsymbol{q}^{*},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{*}}{\mathrm{d}t^{*}},\frac{\mathrm{d}^{2}\boldsymbol{q}^{*}}{\mathrm{d}t^{*2}}\right)=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\left\{\frac{\partial S}{\partial t}\xi_{0}+\frac{\partial S}{\partial q_{s}}\xi_{s}+\frac{\partial S}{\partial\dot{q}_{s}}(\dot{\xi}_{s}-\dot{q}_{s}\dot{\xi}_{0})+\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{s}}[(\dot{\xi}_{s}-\dot{q}_{s}\dot{\xi}_{0})^{\cdot}-\ddot{q}_{s}\dot{\xi}_{0}]\right\}+O(\varepsilon^{2}),$$

即

$$S^{*}=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\tilde{X}^{(2)}(S)+O(\varepsilon^{2}), \tag{11}$$

$$Q_{s}^{*}=Q_{s}^{*}\left(t^{*},\boldsymbol{q}^{*},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{*}}{\mathrm{d}t}\right)=Q_{s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\tilde{X}^{(1)}(Q_{s})+O(\varepsilon^{2}),\ (s=1,2,\cdots,n). \tag{12}$$

定义　如果用经无限小变换(5)变换后的动力学函数 S^* 和 Q_s^* 代替变换前的动力学函数 S 和 Q_s,系统的 Appell 方程(2)的形式保持不变,即

$$\frac{\partial S^{*}}{\partial\ddot{q}_{s}}=Q_{s}^{*},\ (s=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

则这种对称性称为完整系统 Appell 方程(2)的 Mei 对称性.

3　完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性判据

将(11),(12)代入(13)式,忽略 ε^2 以上的高阶小项,并利用方程(2)可得

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_{s}}[\tilde{X}^{(2)}(S)]-\tilde{X}^{(1)}(Q_{s})=0, \tag{14}$$

方程(14)称为 Appell 方程 Mei 对称性的判据方程.于是,有

判据 对于完整系统的 Appell 方程(2),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程(14)成立,则 Appell 方程(2)在无限小变换(5)下的不变性,称为完整系统 Appell 方程(2)的 Mei 对称性.

4 完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量

命题 如果完整系统 Appell 方程(2)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G_M = G_M(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] + (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\tilde{E}_s[\tilde{X}^{(2)}(S)] + \xi_0[\tilde{X}^{(1)}(Q_s)]\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{15}$$

则完整系统 Appell 方程(2)的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$I_M = \xi_0\tilde{X}^{(2)}(S) + \frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_M = \mathrm{const.} \tag{16}$$

证明 利用(9)式,有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}I_M}{\mathrm{d}t} = {} & \left[\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t}\right]\xi_0 + \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \\ & \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \alpha_s\xi_0 - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{17}$$

注意到

$$\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] = \xi_0\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s},$$

则(17)式变为

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}I_M}{\mathrm{d}t} = {} & \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - \xi_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \xi_0\dot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \xi_0\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \\ & \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = \\ & \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \xi_0\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \\ & \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

注意到结构方程(15)和判据方程(14),则有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}I_M}{\mathrm{d}t} = {} & \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] + (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\tilde{E}_s[\tilde{X}^{(2)}(S)] + \xi_0\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = \\ & \xi_0\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s} - \tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right] = 0.\end{aligned}$$

证毕.

5 算 例

完整系统的 Appell 函数和广义力分别为

$$S = \left(\frac{1}{2}\ddot{q}^2 - \ddot{q}\dot{q}\right)\mathrm{e}^{-t}, \tag{18}$$

$$Q = 0. \tag{19}$$

试研究系统的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

首先,研究完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性. 将(18),(19)式代入方程(2)

$$\dot{q}^{\cdot} = \dot{q}. \tag{20}$$

利用(6),(7)和(8)式做计算得

$$\tilde{X}^{(2)}(S) = \xi_0\left(\dot{q}^{\cdot}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^{\cdot 2}\right)\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi}{\mathrm{d}t} - \dot{q}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\dot{q}^{\cdot}\mathrm{e}^{-t}. \tag{21}$$

判据方程(14)给出

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\cdot}}[\tilde{X}^{(2)}(S)] = \left(\dot{q}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{-t} = 0, \tag{22}$$

由方程(22)可找到 Mei 对称的生成元

$$\xi_0 = 1,\ \xi = (q - \dot{q})^2, \tag{23}$$

$$\xi_0 = 0,\ \xi = 1. \tag{24}$$

因此,系统具有 Mei 对称性.

注意到(20)式,利用生成元(23)做计算可得 P

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{25}$$

$$\tilde{X}^{(2)}(S) = \left(\dot{q}^{\cdot}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^{\cdot 2}\right)\mathrm{e}^{-t}, \tag{27}$$

$$\tilde{E}[\tilde{X}^2(S)] = 0. \tag{28}$$

将(19),(23),(25),(26),(27),(28)式代入结构方程(15),并再次注意到(20)式,可得

$$G_M = \frac{1}{2}\dot{q}^2\mathrm{e}^{-t}. \tag{29}$$

故由(16)式可得

$$I_M = \dot{q}\,\mathrm{e}^{-t}(q^2 - 2q\dot{q} + \dot{q}^2) = \mathrm{const.} \tag{30}$$

利用同样的方法由生成元(24)式只能平凡守恒量.

参考文献:

[1] 梅凤翔. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991.

[2] NOETHER A E. Invariante Variations problems[J]. Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys,1918,1(2):235-258.

[3] LUO Shao-kai,JIA Li-qun,CAI Jian-le. A set of Lie symmetrical non-Noether conserved quantity for The relativistic Hamiltonian systems[J]. Chin Phys,2003,12(8):841-845.

[4] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004.

[5] 贾利群,郑世旺. 带有附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性[J]. 物理学报,2006,55(8):3 829-3 832.

[6] ZHENG Shi-wang,JIA Li-qun,YU Hong-sheng. Mei symmetry of Tzenoff equations of holonomic system[J]. Chin Phys,2006,15(7):1 399-1 402.

[7] 贾利群,郑世旺,张耀宇. 事件空间中非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量[J]. 物理学报,2007,56(10):5 575-5 579.

[8] 贾利群,罗绍凯,张耀宇. 事件空间中单面非 Chetaev 型非完整约束系统的 Mei 守恒量[J]. 物理学报,2007,56(11):6 188-6 193.

[9] 贾利群,罗绍凯,张耀宇. 非完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量[J]. 物理学报,2008,57(4):2 006-2 010.

[10] JIA Li-qun,XIE Jia-fang,LUO Shao-kai. Mei symmetry and Mei conserved quantity of nonholonomic systems with unilateral Chetaev's Type in Nielsen style[J]. Chin Phys B,2008,17(5):1 560-1 564.

[11] MEI Feng-xiang. Form invariance of Appell equations[J]. Chin Phys,2001,10(3):177-180.

[12] 李仁杰,乔永芬,孟军. 变质量完整系统 Gibbs-Appell 方程的形式不变性[J]. 物理学报,2002,51(1):1-5.

[13] 罗绍凯. 转动相对论系统的 Appell 方程及其形式不变性[J]. 物理学报,2002,51(4):712-717.

[14] 罗绍凯. Appell 方程的形式不变性与 Lie 对称性[J]. 长沙大学学报,2002,16(4):1-3.

[15] 贾利群,张耀宇,郑世旺. Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量[J]. 云南大学学报:自然

科学版,2007,29(6):589-595.

Structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in holonomic systems

JIA Li-qun[1,2], ZHANG Yao-yu[2], CUI Jin-chao[1]
(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;
2. Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China)

Abstract: Structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in holonomic systems are investigated. Appell equations and differential equations of motion for holonomic mechanic systems are established. The definition and the criterion of Mei symmetry for Appell equations under the infinitesimal transformations of groups are also given. The expressions of the structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in holonomic systems expressed by Appell functions are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Key words: Appell equation; Mei symmetry; structural equation; Mei conserved quantity

* *

(上接第42页)

[9] 黄韬,袁超伟, 杨睿哲,等. MIMO相关技术与应用[M]. 北京:机械工业出版社,2007.

[10] TEHRANI A M, HASSOBO B, CIOFFI J M. Adaptive equalization of MIMO channels [C]//Systems and Computers 1999, Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on, 1999, 1: 547-551.

[11] 李红娟,孙超. 基于空时分组编码的水声MIMO通信系统仿真研究[J]. 系统仿真学报,2007,6: 2 539-2 542.

[12] SHAHID U H Q. Adaptive equalization [J]. Proc IEEE, 1985, 73(9): 1 349-1 387.

[13] 张艳萍,赵俊渭. 基于分数间隔的水声信道盲均衡算法研究[J]. 声学与电子工程,2005,78(2):21-23.

[14] 龚耀寰. 自适应滤波—时域自适应滤波和智能天线[M]. 2版. 北京: 电子工业出版社,2003.

Analysis of adaptive equalizer of MIMO channels with fractionally – spaced in underwater acoustic communication

FENG Yao[1], ZHAO Dong-feng[1], TENG Sai-mei[2], WANG Kan[2]
(1. Department of Communication Engineering, Yunnan University, Kunming 650091, China;
2. The 750 Test Range of the China Shipbuilding Industry Corporation, Kunming 650051, China)

Abstract: To cope with frequency selective fading in underwater acoustic communication, one kind of adaptive equalizer of MIMO channels with fractionally – spaced decision – feedback was proposed. Using a second order phase – locked loop (PLL) to compensate the carrier phase shift, the adaptive equalizer not only eliminate code disturb but also not bring about the noise gain. Its merit is suitable to serious distortion in underwater acoustic communication. Finally, single – input single – output (SISO) system was compared the multiple – input multiple – output (MIMO) system with constant modulus algorithm by simulation.

Key words: constant modulus algorithm; fractionally – spaced decision – feedback equalizer; MIMO channel; underwater acoustic communication