云南大学学报（自然科学版），2009，31（1）：60～64　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

约束 Hamilton 系统量子理论中的 Noether 恒等式[*1]

李瑞洁[1]，李子平[2]
（1. 华北电力大学 数理系，北京　102206；2. 北京工业大学 应用数理学院，北京　100022）

摘要：基于有限自由度奇异 Lagrange 量系统的相空间 Green 函数生成泛函，导出了该系统在定域变换下的量子 Noether 恒等式，并指出无论变换的 Jacobi 行列式是否为 1，结论均成立，且在某些情况下，由量子 Noether 恒等式可导出量子守恒律. 利用量子运动方程，量子 Noether 恒等式可转化为量子（弱）守恒律，这种导致量子守恒律的程式有别于量子水平的 Noether 第 1 定理.

关键词：Noether 恒等式；约束 Hamilton 系统；定域变换；守恒律
中图分类号：O 412.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971（2009）01－0060－05

对称性的研究在物理学中占重要地位. 在经典理论中，整体对称性和守恒律的联系由 Noether 第 1 定理给出，Noether 第 2 定理指的是系统的作用量在无限连续群（定域变换）下的不变性，涉及的是系统的定域对称性. 在这种情况下，必存在含作用量泛函导数的微分恒等式，简称为 Noether 恒等式. 定域不变的系统（描述系统的 Lagrange 量必是奇异的）在相空间存在固有约束，为约束 Hamilton 系. 传统的经典 Noether 定理及其推广均是在位形空间中表述的[1]，相空间正则形式的经典 Noether 定理也已经建立[2～4]. 这些定理是研究有约束的正则系统的有用工具. 本文将研究量子水平的 Noether 第 2 定理.

微观粒子的运动是量子理论描述的，因动力学系统的量子化通常由相空间的正则变量来实现，故系统在相空间中对称性的研究，在量子理论中具有更基本的意义. 动力学系统的量子化常用的方案有正则算符形式和路径积分形式. 路径积分量子化的一个突出优点是出现在路径积分中的量（包括积分测度）均是经典的数，这为分析系统的量子对称性提供了一个有用的工具. 量子系统的性质由 Green 函数的生成泛函导出[1]. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本[5]，也可以说，后者是前者的特殊情况（动量可积情形）. 因此，研究系统在相空间路径积分的正则对称性就具有更普遍的意义. 这里从相空间奇异 Lagrange 系统的 Green 函数生成泛函出发，考虑有限自由度系统（写出场论的结果是直接的）在定域变换下的对称性，导出了该系统在量子水平下的 Noether 恒等式. 并指出在某些情形下，量子 Noether 恒等式可导致系统的量子守恒律.

1　量子正则 Noether 恒等式

设有限自由度动力学系统由奇异 Lagrange 量 $L(t;q^i,\dot{q}^i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 来描述. 由于 Lagrange 量的奇异性，此系统在相空间存在固有约束，为约束 Hamilton 系统[1]. 设 $\Lambda_k(t;q^i,p_i)\approx 0$ $(k=1,2,\cdots,A_1)$ 为第 1 类约束，$\theta_i(t;q^i,p_i)\approx 0$ $(i=1,2,\cdots,B_1)$ 为第 2 类约束，其中 p_i 为 q^i 的正则动量，"≈" 代表等式在约束超曲面上成立. 按照 Faddeev－Senjanovic 量子化方案，对每一个第 1 类约束需选取相应的规范条件：$\Omega_l(t;q^i,p_i)\approx 0$ $(l=1,2,\cdots,A_1)$. 这样奇异 Lagrange 量系统在相空间 Green 函数的生成泛函为[6]

$$Z[N,K]=\int Dq^iDp_i\prod_{i,k,l}\delta(\theta_i)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\cdot$$

* **收稿日期**：2008－01－22
基金项目：北京市自然科学基金资助项目（19420005）.
作者简介：李瑞洁（1974－　），女，河南人，硕士，讲师，主要从事量子场论方面的研究，E－mail：nsylirui@ncepu.edu.cn.

$$\exp\{\mathrm{i}[I^P + \int_1^2 \mathrm{d}t(N_i q^i + K^i p_i)]\},\tag{1}$$

其 $N_i(t)$,$K^i(t)$ 分别为 $q^i(t)$ 和 $p_i(t)$ 相应的外源. 利用 δ 函数和 Grassmann 变量 $\eta(t)$ 和 $\eta^+(t)$ 的积分性质,于是(1)式可化为[7]

$$Z[N,K] = \int DqDp\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t(L_{\mathrm{eff}}^P + Nq + Kp)\right] = \int DqDp\exp\mathrm{i}\left[I_{\mathrm{eff}}^P + \int_{t_1}^{t_2}(Nq + Kp)\mathrm{d}t\right],\tag{2}$$

其中

$$\begin{cases}L_{\mathrm{eff}}^P = L^P + L_m + L_{gh},\\ L^P = p\dot{q} - H_C,\\ L_m = \lambda_i\theta_i + \lambda_k\Lambda_k + \lambda_l\Omega_l,\\ L_{\mathrm{gh}} = \int\mathrm{d}\tau\left[\eta_k^+(t)\{\Lambda_k(t),\Omega_l(\tau)\}\eta_l(\tau) + \dfrac{1}{2}\eta_i^+(t)\{\theta_i(t),\theta_j(\tau)\}\eta(\tau)\right].\end{cases}\tag{3}$$

$q(t) = (q^i(t),\lambda_k(t),\lambda_l(t),\lambda_i(t),\eta^+(t),\eta(t))$,$p = (p_i)$,$N = (N_i)$,$K = (K^i)$,$H_C$ 为系统的正则 Hamilton 量.

现考察生成泛函在增广相空间中的变换性质. 在增广相空间中取如下无穷小变换

$$\begin{aligned}&t \to t' = t + \Delta t = t + R^\sigma\varepsilon_\sigma(t);\\ &q(t) \to q(t)' = q(t) + \Delta q = q(t) + S^\sigma\varepsilon_\sigma(t);\\ &p(t) \to p(t)' = p(t) + \Delta p = p(t) + T^\sigma\varepsilon_\sigma(t),\end{aligned}\tag{4a}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(t)$ 为任意函数,它们及其所需的各级微商在端点为 0,$R^\sigma = a_k^\sigma D^k$,$S^\sigma = b_l^\sigma D^l$,$T^\sigma = c_m^\sigma D^m$,$\left(D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$. 其中 a,b,c 均为 t,q,p 的函数. 在(4a)式变换下,假设系统有效正则作用量的改变为

$$\Delta I_{\mathrm{eff}}^P = \int_1^{t_2}\mathrm{d}tU^\sigma\varepsilon_\sigma(x),\tag{4b}$$

其中 $U^\sigma = e_n^\sigma D^n$,$e_n^\sigma$ 为 t,q,p 的函数. 记(4a)式变换的 Jacobi 行列式为 $J(t,q,p)$ 为 $J(t,q,p) = 1 + J_1(t,q,p)$($J(0) = 1$,$J_1(t,q,p)$ 为小量),则由(2)式得

$$\begin{aligned}&\int DqDp\left(1 + J_1 + \mathrm{i}\Delta I_{\mathrm{eff}}^P + \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\{N\delta q + K\delta p + D[(Nq + Kp)\Delta t]\}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t[L_{\mathrm{eff}}^P + Nq + Kp]\right\} =\\ &\int DqDp\left(1 + J_1 + \mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\{U^\sigma\varepsilon_\sigma + N\delta q + K\delta p + D[(Nq + Kp)\Delta t]\}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t[L_{\mathrm{eff}}^P + Nq + Kp]\right\},\end{aligned}\tag{5}$$

其中

$$\Delta I_{\mathrm{eff}}^P = \int_{t_2}^{t_1}\left\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q}\delta q + \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p}\delta p + D[p\Delta q - H_{\mathrm{eff}}\Delta t]\right\}\mathrm{d}t,\tag{6}$$

$$\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q} = -\dot{p} - \frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial q};\ \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p} = \dot{q} - \frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial p},\tag{7}$$

$$\delta q = \Delta q - \dot{q}\Delta t,\ \delta p = \Delta p - \dot{p}\Delta t.\tag{8}$$

其中 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,$H_{\mathrm{eff}}$ 为 I_{eff}^P 相应的 Hamilton 量. 根据函数 $\varepsilon_\sigma(t)$ 边界条件(端点项为0),得

$$\int DqDp\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q}\delta q + \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p}\delta p - U^\sigma\varepsilon_\sigma\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t[I_{\mathrm{eff}}^P + Nq + Kp]\right\} = 0.\tag{9}$$

对(9)式中前一大括号内积分下的项做分部积分后,利用 $\varepsilon_\sigma(t)$ 的端点条件,然后对 $\delta_\sigma(t)$ 做泛函微商,可得

$$\begin{aligned}&\int DqDp\left\{\tilde{S}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)} + \tilde{T}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)} - \tilde{R}^\sigma\left(\dot{p}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)} + \dot{q}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}\right) - \tilde{U}^\sigma(1)\right\}\cdot\\ &\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t[I_{\mathrm{eff}}^P + Nq + Kp]\right\} = 0.\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\tilde{S}^\sigma,\tilde{T}^\sigma,\tilde{R}^\sigma,\tilde{U}^\sigma$ 分别为 $S^\sigma,T^\sigma,R^\sigma,U^\sigma$ 的伴随算符[8]. 将(10)式关于 $N(t)$ 求 n 次泛函微商,可得

$$\int DqDp\left\{\tilde{S}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}+\tilde{T}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}-\tilde{R}^\sigma\left(\dot{p}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}+\dot{q}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}\right)-\tilde{U}^\sigma(1)\right\}\cdot$$

$$q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t[I_{\mathrm{eff}}^P+Nq+Kp]\right\}=0. \tag{11}$$

令(11)式中外源 $N=K=0$ 可得

$$\left\langle 0\left|T^*\left[\tilde{S}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}+\tilde{T}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}-\tilde{R}^\sigma\left(\dot{p}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}+\dot{q}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}\right)-\tilde{U}^\sigma(1)\right]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\right|0\right\rangle=0, \tag{12}$$

其中 T^* 是一种特定的遍时乘积[9]. 让 $t_1,t_2,\cdots,t_m\to+\infty,t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n\to-\infty$,并记

$\langle\,|\lim\limits_{\substack{t_1\to+\infty\\ \vdots\\ t_m\to+\infty}}q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_m)={}_{\mathrm{out}}\langle q_m|,\lim\limits_{\substack{t_{m+1}\to-\infty\\ \vdots\\ t_n\to-\infty}}q(t_{m+1})q(t_{m+2})\cdots q(t_n)\mid 0\rangle=\mid q_{n-m}\rangle_{\mathrm{in}}$,则(12)式就成为

$${}_{\mathrm{out}}\left\langle q_m\left|\left[\tilde{S}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}+\tilde{T}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}-\tilde{R}^\sigma\left(\dot{p}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}+\dot{q}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}\right)-\tilde{U}^\sigma(1)\right]\right|q_{n-m}\right\rangle_{\mathrm{in}}=0. \tag{13}$$

由于 m,n 任意,于是有

$$\tilde{S}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}+\tilde{T}^\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}-\tilde{R}^\sigma\left(\dot{p}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p(t)}+\dot{q}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q(t)}\right)-\tilde{U}^\sigma(1)=0. \tag{14}$$

(14)式即为有限自由度的奇异 Lagrange 系统(约束 Hamilton 系统)在定域变换(4)式下的量子正则 Noether 恒等式,其中不出现系统的基态符号 $|0\rangle$. 无论(4)式的 Jacobi 行列式是否为1,(14)式均成立. 它与经典正则 Noether 恒等式不同的是,(14)式为算符方程,经典情形出现的是 L^P,此处为 $I_{\mathrm{eff}}^P=L^P+L_m+L_{\mathrm{gh}}$. 对正规 Lagrange 量系统,在相空间不含约束,(14)式对该系统仍成立,只需将 I_{eff}^P 改为 L^p 即可.

2 量子守恒律

利用量子正则 Noether 恒等式,在某些情况下可得到量子强守恒律和弱守恒律. 考虑如下无穷小定域变换(Yang - Mills 理论属这类变换特例):

$$\begin{cases}\delta t=0,\\ \delta q(t)=b_\sigma\varepsilon^\sigma(t)+b_\sigma D\varepsilon^\sigma(t),\\ \delta p(t)=c_\sigma\varepsilon^\sigma(t)+c_\sigma D\varepsilon^\sigma(t),\end{cases} \tag{15}$$

其中 b_σ,c_σ 均为 t,q 和 p 的函数,$\varepsilon^\sigma(t)$ 为任意函数. 假设在(15)式变换下有效 Lagrange 量 L_{eff}^P 的变更为

$$\delta L_{\mathrm{eff}}^P=u_\sigma\varepsilon^\sigma(t)=(u_\sigma+u_\sigma D+u_\sigma D^2)\varepsilon^\sigma(t), \tag{16}$$

其中 u_σ 是 t,q 和 p 的函数,$D^2=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$. 这时,量子 Noether 恒等式为

$$b_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q}-D\left(b_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q}\right)+c_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p}-D\left(c_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p}\right)=u_\sigma-Du_\sigma+D^2u_\sigma. \tag{17}$$

在(15)式变换下,由 I_{eff}^P 的变分和(16)式,可得基础恒等式

$$\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q}(b_\sigma+b_\sigma D)\varepsilon^\sigma(t)+\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p}(c_\sigma+c_\sigma D)\varepsilon^\sigma(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p(b_\sigma+b_\sigma D)\varepsilon^\sigma(t)]=$$

$$(u_\sigma+u_\sigma D+u_\sigma D^2)\varepsilon^\sigma(t). \tag{18}$$

用 $\varepsilon^\sigma(t)$ 乘(17)式并对 σ 求和,然后将所得的结果与(18)式相减,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(b_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q}+c_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p}-u_\sigma+Du_\sigma-u_\sigma D\right)\varepsilon^\sigma(t)+p(b_\sigma+b_\sigma D)\varepsilon^\sigma(t)\right]=0. \tag{19}$$

将(19)式对 t 积分,得强守恒律

$$Q = \int j_\sigma \varepsilon^\sigma(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{const}, \tag{20}$$

其中

$$j_\sigma = b_\sigma \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta q} + c_\sigma \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^P}{\delta p} - u_\sigma + Du_\sigma - u_\sigma D + p(b_\sigma + b_\sigma D). \tag{21}$$

该强守恒律与 q 和 p 是否是系统量子正则方程的解无关.

设无限连续群有子群,且 $\varepsilon^\sigma(t) = \varepsilon^\rho \xi_\rho^\sigma(t)$,其中 $\varepsilon^\rho(\rho = 1,2,\cdots,s)$ 为李群的数值参数,$\xi_\rho^\sigma(t)$ 为给定函数. 此时,强守恒律(20) 变为

$$Q_\rho = \int j_\sigma \xi_\rho^\sigma \mathrm{d}t = \mathrm{const}\ (\rho = 1,2,\cdots,s). \tag{22}$$

利用约束系统的量子正则方程[7],$\delta I_{\mathrm{eff}}^P/\delta q = 0$,$\delta I_{\mathrm{eff}}^P/\delta p = 0$, 由(22)式可得量子水平的弱守恒律. 如果有效正则作用量在相应变换下不变,则该量子守恒律与整体变换下的量子正则 Noether 第 1 定理得到的结果相同. 可见,在某些变换下,量子正则 Noether 恒等式可转化为量子(弱)守恒律,即使有效正则作用量在特定定域变换下是非不变的. 这种导致量子守恒律的程式有别于量子水平的 Noether 第 1 定理,Noether 第 1 定理是有限连续群下的不变性所决定的守恒量.

3　讨论和结论

基于有限自由度奇异 Lagrange 量系统的相空间 Green 函数生成泛函,从其中的正则作用量出发,考虑系统在定域变换下的变换性质,导出了普遍情况下(变换的 Jacobi 行列式 $J \neq 1$),奇异 Lagrange 量系统在定域变换下的量子 Noether 恒等式,其中不含系统基态符号$|0\rangle$. 并指出无论变换的 Jacobi 行列式是否为 1,结论均成立.

无论是正规 Lagrange 量系统还是奇异 Lagrange 量系统,经典正则 Noether 恒等式均是由 L^P 决定的[1]. 与经典情形不同,奇异 Lagrange 量系统的量子 Noether 恒等式应由有效拉氏量 L_{eff}^P 而不是由正则拉氏量 L^P 决定,一般 L_{eff}^P 中不仅包含了所有约束(可以是第 1 类约束和第 2 类约束),而且还包含了规范条件. 对正规 Lagrange 量系统,经典和量子 Noether 恒等式有相同的形式. 但前者是 C－数,后者为 q－数等式.

参考文献:

[1]　李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京:北京工业大学出版社,1993.

[2]　LI Zi-ping. Symmetry in a constrained Hamiltonian system with a singular higher-order Lagrangian[J]. J Phys A:Math Gen, 1991,24:4 261-4 274.

[3]　LI Zi-ping. Generalized Noether theorems and Poincaré-Cartan integral invariant for singular higher-order Lagrangian in field theories[J]. Sci China A,1993,36(10):1 212-1 225.

[4]　LI Zi-ping. Symmetry in phase space for a system with a singular higher-order Lagrangian[J]. Phys Rev,1994,E50(2):876-887.

[5]　MIZRAHI M M. Phase space path integrals,without limiting procedure[J]. J Math Phys,1978,19:298-307.

[6]　SENJANOVIC P. Path integral quantization of field theories with second-class constraints[J]. Ann Phys (NY),1976,100:227-261.

[7]　LI Zi-ping. Canonical symmetry of a constrained Hamiltonian system and canonical Ward identity[J]. Int J Phys,1995,34(4):523-543.

[8]　LOGAN J D. Invariant variational principles[M]. Chapt:Academic Press,1977.

[9]　SUURA H,YOUNG B L. Derivation of general conservation laws and Ward-Takahashi identities in the functional integration method[J]. Phys Rev,D,1973,8:4 353-4 371.

[10]　LI Zi-ping. Transformation properties of constrained Hamiltonian system and PBRST charge[J]. Int J Theor Phys,1994,33(6):1 207-1 215.

Quantal Noether identity for a Constrained Hamiltonian system

LI Rui-jie[1], LI Zi-ping[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, North China Electric University, Beijing 102206, China;
2. College of Applied Science, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China)

Abstract: Based on phase-space generating functional of Green function for a singular Lagrangian system with a finite number of degrees of freedom, the quantal canonical Noether identity (NI) under the local transformation is derived, in which there is no ground state sign of the system. It is pointed that the identity hold true no matter whether the Jacobian of the transformation is eaual to unity or not. The strong quantal conservation law deriving from NI is deduced. It is pointed out that in certain cases, the quantal NI may be converted into the quantal (weak) conservation laws by using the quantal equations of motion. This algorithm to derive the quantal (weak) conservation laws differs from the quantal first Noether theorem.

Key words: Noether identity; constrained Hamiltonian system; local transformation; conservation law

* *

(上接第59页)

The "Pre – universe" and its characteristics

XU Di-yu[1], JIAO Shan-qing[2], GONG Zi-zheng[3], ZHU Yong-jin[1]

(1. Department of Physics, Sichuan Vocational and Technical College, Suining 629000, China;
2. Department of Physics, Science College, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
3. Department of Integration & Spacecraft Environmental, CAST Beijing, 100094, China)

Abstract: The standard model of the big bang of the universe, which holds that the expanding universe originated from the big bang of the point, when the universe time $t_c = 0$ and the universe radius $r_c = 0$, incurs censure constantly. If the unification formulas calculating the mass and the radius of celestial bodies and particles are extended to transend Planck scale, the conclusion can be drawn that the universe originated from the big bang of the "super – micro black hole". Recently it is put forward that the expanding universe originated from the big bang of the "pre – universe", by which the theory of the big bang of the point is denied, and both the theories of the "pre – universe" and our "super – micro black hole" are different in approach but equally statisfactory in result. Some strange phenomena about "super – micro black hole" and "pre – universe" restricted by relativity, quantum theory and statistical mechanics are discovered.

Key words: unification calculation of heavenly body and particle; super – micro black hole; "pre – universe"; theory of "loop – quantum gravity"; big bang scale