云南大学学报（自然科学版），2009，31（2）：109～113　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

左端简单支撑右端被滑动夹子夹住的奇异梁方程的正解 [*1]

姚庆六
（南京财经大学 应用数学系，江苏 南京　210003）

摘要：利用积分方程技巧和锥上的 Guo－Krasnosel′skii 不动点定理研究了一类非线性四阶两点边值问题的正解存在性，其中允许非线性项 $f(t,u,v)$ 在 $t=0,t=1$ 及 $u=0,v=0$ 处奇异. 在力学上这类问题模拟了左端简单支撑右端被滑动夹子夹住的弹性梁的挠曲. 由于非线性项涉及弯矩，主要结论对于梁的稳定性分析是有益的.

关键词：奇异常微分方程；边值问题；正解；存在性
中图分类号：O 175.8　**文献标识码**：A　**文章编号**：0258－7971（2009）02－0109－05

本文考察下列非线性四阶两点边值问题的正解：

$$(P)\begin{cases}u^{(4)}(t)=f(t,u(t),u''(t)),\ 0<t<1,\\ u(0)=u'(1)=u''(0)=u'''(1)=0.\end{cases}$$

这里问题(P)的正解是指(P)的满足 $u^*(t)>0,0<t\leqslant 1$ 的解.

问题(P)是Gupta[1]研究梁的挠曲时所考察的6种典型梁方程之一. 在力学上问题(P)模拟了左端简单支撑右端被滑动夹子夹住的弹性梁的形变. 目前在梁的挠曲分析中，关于两端简单支撑的梁（边界条件为 $u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0$）的研究比较多[2,3]，有关问题$(P)$的论文近年也出现了[4~7]. 不过这些研究均假设非线性项 $f(t,u,v)$ 为连续函数. 有关其他梁方程的工作可见文献[8～10].

本文考察奇异问题(P). 确切地说，文中将使用下列假设：

(H_1) $f:(0,1)\times(0,+\infty)\times(-\infty,0)\to[0,+\infty)$ 为连续函数并且存在连续函数 $g:[0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0]\to[0,+\infty)$ 和连续函数 $h:(0,1)\times(0,+\infty)\times(-\infty,0)\to[0,+\infty)$，使得

$$f(t,u,v)\leqslant g(t,u,v)+h(t,u,v),\ (t,u,v)\in(0,1)\times(0,+\infty)\times(-\infty,0).$$

(H_2) 如果 $0<u_1\leqslant u_2<+\infty,\ -\infty\leqslant v_2\leqslant v_1\leqslant 0$，则

$$h(t,u_1,v_1)\geqslant h(t,u_2,v_2),\ 0<t<1.$$

(H_3) 对于任何 $r>0$ 均有 $\int_0^1 th\left(t,\frac{1}{3}rt,-rt\right)\mathrm{d}t<+\infty$.

因此，本文允许 $f(t,u,v)$ 在 $t=0,t=1$ 及 $u=0,v=0$ 处奇异. 迄今为止在这些假设下还没有问题(P)正解存在性的任何结论. 问题(P)的显著特点是它的非线性项 $f(t,u(t),u''(t))$ 含有弯矩 $u''(t)$. 因此问题(P)的存在性对于梁的稳定性分析具有更全面、更深刻的价值.

设 $C_0^2[0,1]=\{u\in C^2[0,1]:u(0)=u'(1)=0\}$. 则 $C_0^2[0,1]$ 是以 $\||u|\|=\max\{\|u\|,\|u''\|\}$ 为范数的 Banach 空间，其中对于 $u\in C[0,1]$ 记 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$. 又设

$$K=\{u\in C_0^2[0,1]:u(t)\geqslant\|u\|t,\ -u''(t)\geqslant\|u''\|t,0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

---

* **收稿日期**：2008－03－10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10571085）.
作者简介：姚庆六（1946－　），男，上海人，教授，主要从事应用微分方程方面的研究.

则 K 是 $C_0^2[0,1]$ 中的一个非负函数锥. 此外记 $|(u,v)| = \max\{2|u|,|v|\}$,并且

$$M(r) = \max\left\{g(t,u,v):0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}r, -r \leqslant v \leqslant 0\right\}.$$

本文将证明下列存在定理.

定理 1 假设$(H_1) \sim (H_3)$成立. 如果满足下列条件,则问题(P)至少有一个正解 $u^* \in K$:

(a1) 存在 $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ 使得 $\liminf\limits_{|(u,v)| \to 0} \min\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} f(t,u,v) > 0$;

(a2) $\liminf\limits_{r \to \infty} M(r)/r < 2$.

令 $h(t,u,v) \equiv 0$. 容易看出定理 1 有下列推论,这是一个典型的奇异次线性型结论.

推论 1 假设 $g:[0,1] \times [0,+\infty) \times (-\infty,0] \to [0,+\infty)$ 连续. 如果满足下列条件,则问题(P)至少有一个正解 $u^* \in K$:

(b1) 存在 $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ 使得 $\lim\limits_{|(u,v)| \to 0} \min\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} g(t,u,v)/|(u,v)| = +\infty$;

(b2) $\lim\limits_{|(u,v)| \to \infty} \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} g(t,u,v)/|(u,v)| = 0$.

为了证明定理 1,需要下列 Guo - Krasnosel$'$skii 锥拉伸与锥压缩型不动点定理.

引理 1 设 X 是 Banach 空间,K 是 X 中的一个锥,Ω_1,Ω_2 都是 K 中的有界开集,使得 $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 又设 $T:\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1 \to K$ 是一个全连续算子并且下列条件之一满足

(1) $\|Tx\| \leqslant \|x\|, x \in \partial\Omega_1$ 并且 $\|Tx\| \geqslant \|x\|, x \in \partial\Omega_2$;

(2) $\|Tx\| \geqslant \|x\|, x \in \partial\Omega_1$ 并且 $\|Tx\| \leqslant \|x\|, x \in \partial\Omega_2$.

则 T 在 $\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1$ 中至少有一个不动点.

定理 1 的证明 设 $G(t,s)$ 为线性问题 $-u''(t) = 0, u(0) = u'(1) = 0$ 的 Green 函数,即

$$G(t,s) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

易知 $G(t,s) \leqslant s, 0 \leqslant t,s \leqslant 1$. 又记 $K[r_1,r_2] = \{u \in K: r_1 \leqslant \||u|\| \leqslant r_2\}$,

$$\Omega_r = \{u \in K: \||u|\| < r\}, \ \partial\Omega_r = \{u \in K: \||u|\| = r\}.$$

定义算子 T 为

$$(Tu)(t) = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

当上式右端有定义时直接求导可得

$$(Tu)''(t) = -\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

第 1 步 证明如果 $u \in K$,则 $\||u|\| = \|u''\|$ 并且 $\frac{1}{3}\||u|\| \leqslant \|u\| \leqslant \frac{1}{2}\||u|\|$.

因为 $u(0) = u'(1) = 0$,所以 $u(t) = \int_0^1 G(t,s)[-u''(s)]\mathrm{d}s, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 又因为 $\|u''\|t \leqslant -u''(t) \leqslant \|u''\|$,可知

$$\|u\| \leqslant \|u''\| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\|u''\| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}[2t - t^2] = \frac{1}{2}\|u''\|,$$

$$\|u\| \geqslant \|u''\| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)s\mathrm{d}s = \frac{1}{6}\|u''\| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}[3t - t^3] = \frac{1}{3}\|u''\|.$$

第 2 步 证明对于任何 $0 < r_1 < r_2, T:K[r_1,r_2] \to K$.

设 $u \in K[r_1,r_2]$. 根据第 1 步,$\frac{1}{3}r_1 \leqslant \|u\| \leqslant \frac{1}{2}r_2, r_1 \leqslant \|u''\| \leqslant r_2$. 于是对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\frac{1}{3}r_1 t \leqslant u(t) \leqslant \frac{1}{2}r_2, \ r_1 t \leqslant -u''(t) \leqslant r_2.$$

注意到 $G(t,s)\leqslant s, 0\leqslant t,s\leqslant 1$,根据假设$(H_1)\sim(H_3)$可得

$$\begin{aligned}(Tu)(t)\leqslant&\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)g(\tau,u(\tau)g(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\\&\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)h(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\\&M(r_2)\int_0^1\int_0^1 s\tau\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\int_0^1\int_0^1 s\tau h\left(\tau,\frac{1}{3}r_1\tau,-r_1\tau\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=\\&\frac{1}{4}M(r_2)+\frac{1}{2}\int_0^1\tau h\left(\tau,\frac{1}{3}r_1\tau,-r_1\tau\right)\mathrm{d}\tau<+\infty.\end{aligned}$$

这说明 Tu 有定义. 另一方面,容易看出$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=s$ 且 $G(t,s)\geqslant ts, 0\leqslant s\leqslant 1$. 因此

$$\begin{aligned}(Tu)(t)=&\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant t\int_0^1 sG(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant\\&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant\|Tu\|t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(Tu)''(t)=&\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\geqslant t\int_0^1\max_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&t\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s=\|(Tu)''\|t.\end{aligned}$$

注意到$G(0,s)=0,\frac{\partial}{\partial t}G(1,s)=0, 0\leqslant s\leqslant 1$,可得$(Tu)(0)=(Tu)'(1)=0$. 这样一来即可推出 $T:K[r_1,r_2]\rightarrow K$.

第 3 步　证明对于任何 $0<r_1<r_2$, $T:K[r_1,r_2]\rightarrow K$ 全连续.

设 $\gamma_n(t)=\min\left\{h\left(t,\frac{1}{3}r_1t,-r_1t\right),n\right\}$. 则 $\gamma_n:[0,1]\rightarrow[0,+\infty)$ 连续. 根据(H_3)和积分的定义可知 $\int_0^1 t\left[h\left(t,\frac{1}{3}r_1t,-r_1t\right)-\gamma_n(t)\right]\rightarrow 0(n\rightarrow\infty)$. 定义函数$f_n$ 如下:

如果$f(t,u,v)\leqslant g(t,u,v)+\gamma_n(t)$,令$f_n(t,u,v)=f(t,u,v)$;

如果$f(t,u,v)>g(t,u,v)+\gamma_n(t)$,令$f_n(t,u,v)=g(t,u,v)+\gamma_n(t)$.

从定义看出$f_n:[0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0]\rightarrow[0,+\infty)$ 连续并且

$$0\leqslant f(t,u,v)-f_n(t,u,v)\leqslant h(t,u,v)-\gamma_n(t).$$

定义算子 T_n 如下,对于$0\leqslant t\leqslant 1$,

$$(T_nu)(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)f_n(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

利用f_n 的连续性和 Arzela - Ascoli 定理可以证明 $T_n:K\rightarrow K$ 全连续.

容易看出$\max\limits_{0\leqslant t,s\leqslant 1}G(t,s)=1$. 根据$(H_2)$和第 1 步可知对于任何 $u\in K[r_1,r_2]$ 必有:对于任何$0<t<1$, $h(t,u(t),u''(t))\leqslant h\left(t,\frac{1}{3}r_1t,-r_1t\right)$. 这样一来

$$\begin{aligned}&\sup_{u\in K[r_1,r_2]}\|Tu-T_nu\|=\\&\sup_{u\in K[r_1,r_2]}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)[f(\tau,u(\tau),u''(\tau))-f_n(\tau,u(\tau),u''(\tau))]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\\&\sup_{u\in K[r_1,r_2]}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)[h(\tau,u(\tau),u''(\tau))-\gamma_n(\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\\&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)\left[h\left(\tau,\frac{1}{3}r_1\tau,-r_1\tau\right)-\gamma_n(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\end{aligned}$$

$$\max_{0\leqslant t,s\leqslant 1} G(t,s)\int_0^1 \tau\left[h\left(\tau,\frac{1}{3}r_1\tau,\ -r_1\tau\right)-\gamma_n(\tau)\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^1 \tau\left[h\left(\tau,\frac{1}{3}r_1\tau,\ -r_1\tau\right)-\gamma_n(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \to 0.$$

这表明全连续算子序列 $T_n, n=1,2,\cdots$ 在有界闭集 $K[r_1,r_2]$ 上一致收敛于算子 T. 因此算子 $T:K[r_1,r_2]\to K$ 全连续.

第4步 证明定理的结论.

根据(a1)存在 $L>0$ 及 $0<\bar{r}\leqslant R$,使得

$$f(t,u,v)\geqslant L,\ (t,u,v)\in[\alpha,\beta]\times\left(0,\frac{1}{2}\bar{r}\right]\times[-\bar{r},0).$$

令 $a=\min\{\bar{r},LB^{-1}\}$,其中 $B=\left[\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\alpha^\beta G(t,s)\mathrm{d}s\right]^{-1}$,则有

$$f(t,u,v)\geqslant aB,\ (t,u,v)\in[\alpha,\beta]\times\left(0,\frac{1}{2}a\right]\times[-a,0).$$

如果 $u\in\partial\Omega(a)$,则 $\|\,|u|\,\|=a$. 于是 $0\leqslant u(t)\leqslant\frac{1}{2}a,\ -a\leqslant u''(t)\leqslant 0, 0\leqslant t\leqslant 1$,并且

$$f(t,u(t),u''(t))\geqslant aB,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

根据第1步即可推出

$$\|\,|u|\,\| = \|(Tu)''\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\alpha^\beta G(t,s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s \geqslant aB\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\alpha^\beta G(t,s)\mathrm{d}s = a = \|\,|u|\,\|.$$

根据(a2)知 $\varepsilon=\frac{1}{2}[2-\liminf\limits_{r\to\infty}M(r)/r]>0$. 设 $r>1$. 因为 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=s$,则有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h\left(s,\frac{1}{3}rs,\ -rs\right)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\int_0^1 \max_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)h\left(s,\frac{1}{3}rs,\ -rs\right)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 sh\left(s,\frac{1}{3}s,\ -s\right)\mathrm{d}s < +\infty.$$

这样一来 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sup\limits_{u\in\partial K(r)}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s=0$. 因此存在 $b>\max\{a,1\}$,使得

$$\sup_{u\in\partial K(b)}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon b,$$

并且 $M(b)\leqslant(2-\varepsilon)b$.

如果 $u\in\partial\Omega(b)$,则 $\|\,|u|\,\|=b$ 并且 $0\leqslant u(t)\leqslant\frac{1}{2}b,\ -b\leqslant u''(t)\leqslant 0, 0\leqslant t\leqslant 1$.

于是对于 $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$g(t,u(t),u''(t))\leqslant M(b)\leqslant(2-\varepsilon)b,$$
$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon b.$$

因为 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}(-t^2+2t)=\frac{1}{2}$,我们得到

$$\|\,|Tu|\,\| = \|(Tu)''\| \leqslant$$
$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s \leqslant$$
$$(2-\varepsilon)b\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\varepsilon b = b = \|\,|u|\,\|.$$

因为 $T:K[a,b]\to K$ 为全连续算子并且 $K[a,b]=\bar{\Omega}_b\backslash\Omega_a$,根据引理3,算子 T 有一个不动点 $u^*\in K$

并且 $a \leqslant \|u^*\| \leqslant b$. 因此又有

$$u^*(t) = (Tu^*)(t) = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,\tau)f(\tau,u^*(\tau),(u^*)''(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

直接核验可得 $u^*(0) = 0$ 并且 $u^*(0) = (u^*)'(1) = (u^*)''(0) = (u^*)'''(1) = 0$. 另一方面上式两端关于 t 求导 2 次可得

$$(u^*)^{(4)}(t) = f(t,u^*(t),(u^*)''(t)) = 0,\ 0 < t < 1.$$

因而 u^* 是问题(P) 的一个解. 因为 $u^*(t) \geqslant \|u^*\| t \geqslant bt > 0, 0 < t \leqslant 1$,可知 u^* 是问题(P) 的正解. 证毕.

参考文献:

[1] GUPTA C P. Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation [J]. Applicable Analysis,1988, 26(3):289-304.

[2] BAI Zhan-bing,WANG Hai-yan. On positive solutions of some nonlinear fourth-order beam equations [J]. J Math Anal Appl, 2002,270(2):357-368.

[3] YAO Q. Existence of n solutions and/or positive solutions to a semipositone elastic beame quation [J]. Nonlinear Anal,2007, 66(1):138-150.

[4] 姚庆六. 一类弹性梁方程的正解存在性与多解性[J]. 山东大学学报:理学版,2004,39(5):64-67.

[5] 姚庆六,江涛. 一类经典非线性弹性梁方程的正解[J]. 郑州大学学报:理学版,2006,38(1):1-6.

[6] 姚庆六. 一类半线性四阶边值问题的解和正解[J]. 数学研究与评论,2007,27(2):385-390.

[7] 白占兵. 某些四阶微分方程的迭代解[J]. 系统科学与数学,2007,27(4):555-562.

[8] 姚庆六,李永祥. 一类非线性旋臂梁解的存在性[J]. 云南大学学报:自然科学版,2006,28(4):277-280.

[9] 姚庆六. 含有 2 个参数的非线性四阶边值问题的一个正解存在定理[J]. 云南大学学报:自然科学版,2007,29(6):541-545.

[10] 姚庆六. 一类含参数半正四阶边值问题的正解存在性与多解性[J]. 数学学报,中文版,2008,51(2):401-410.

Positive solution to a singular beam equation simply supported at left and clamped at right by sliding clamps

YAO Qing-liu

(Department of Applied Mathematics,Nanjing University of Finance and Economics,Nanjing 210003,China)

Abstract: By applying the technique of integral equation and the Guo – Krasnosel'skii fixed point theorem of cone expansion – compression type,the existence of positive solution is studied for a class of nonlinear fourth – order two – point boundary value problems,where the nonlinear term $f(t,u,v)$ is allowed to be singular at $t=0, t=1$ and $u=0, v=0$. In mechanics,the class of problems describes the deflection of an elastic beam simply supported at left and clamped at right by sliding clamps. Because the nonlinear term concerns with the bending moment, main results is useful for the stability analysis of the beam.

Key words: singular ordinary differential equation; boundary value problem; positive solution; existence