云南大学学报（自然科学版），2009，31（4）：325～328　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

极大子群的指数皆素数的群*1

曾利江，翁小勇
（遵义师范学院 数学系，贵州 遵义　563002）

摘要：首先，引进了 p－主因子，超可解群和强 p－闭群的新概念；然后，证明了它们的一些性质；最后利用这些性质和概念证明了极大子群的指数皆素数的群必是超可解群.

关键词：p－主因子；超可解群；强 p－闭群；主群列
中图分类号：O 152　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2009)04－0325－04

群的幂零性和可解性是群论研究中历史悠久而又常新的课题，文献[1～6]都对这个课题有各自的研究. 本文引进了群的 p－主因子、超可解群和强 p－闭群几个新概念，并用 9 个引理证明了它们的一些性质，最后，利用这些性质和这些概念证明了如果一个群的极大子群的指数皆素数，则它必定是超可解群.

为了证明本文的主要结论，先作一些准备.

定义 1　若 $H,K \lhd G, K < H$ 且 H/K 为 G/K 的一个极小正规子群[7]，即 H,K 为 G 的某个主群列之相邻的 2 项，则称 H/K 为群 G 的一个主因子；若 H/K 为群 G 的一个主因子，而 $|H/K|$ 又为一素数 p 的某个幂，则称 H/K 为 G 的一个 p－主因子.

对任意 $x \in G$，令 f_x 表示 H/K 到 H/K 上的映射，使 $(Kh)^{f_x} = Kx^{-1}hx$，则 f_x 是 H/K 的 1 个自同构（即 $f_x \in \mathrm{Aut}(H/K)$），称 f_x 为由 x 诱导的 H/K 的自同构.

令 $\mathrm{Aut}_G(H/K) = \{f_x \mid x \in G, f_x$ 是由 x 诱导的 H/K 的自同构$\}$，则对 G 的任意 2 元 x,y 及任意 $h \in H$，因为 $(Kh)^{f_xf_y} = ((Kh)^{f_x})^{f_y} = (Kx^{-1}hx)^{f_y} = Ky^{-1}x^{-1}hxy = K(xy)^{-1}h(xy) = (Kh)^{f_{xy}}$，故 $f_xf_y = f_{xy}$，即 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 是 $\mathrm{Aut}(H/K)$ 的子群.

因为 $f_xf_y = f_{xy}$ 这一关系式还说明了由 $x^\alpha = f_x(x \in G)$ 所定义的 G 到 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 上的映射是同构映射：$(xy)^\alpha = f_{xy} = f_xf_y = x^\alpha y^\alpha$，故 $G/\ker\alpha \cong \mathrm{Aut}_G(H/K)$. 因为 $x \in \ker\alpha$ 的充要条件是 $f_x = 1$（恒等自同构），与之等价的是，对任意 $h \in H$，有 $Kh = (Kh)^{f_x} = Kx^{-1}hx$，即 $x^{-1}hxh^{-1} \in K$，亦即 $x \in C_G(H/K)$，这就证明了 $\ker\alpha = C_G(H/K)$. 从而证明了下面的引理 1.

引理 1　设 $H,K \lhd G, K \leqslant H$，则 $C_G(H/K) \lhd G$，且有 $G/C_G(H/K) \cong \mathrm{Aut}_G(H/K)$.

引理 2　若 $N/\Phi(G)$ 是 $G/\Phi(G)$ 的 1 个幂零正规子群，则 N 是幂零的.

证明　令 $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$，则 $\Phi(G)P/\Phi(G) \in \mathrm{Syl}_p(N/\Phi(G))$，故由 $N/\Phi(G)$ 的幂零性得知 $\Phi(G)P/\Phi(G) \lhd\lhd N/\Phi(G)$，于是再由 $N/\Phi(G) \lhd G/\Phi(G)$ 得 $\Phi(G)P/\Phi(G) \lhd G/\Phi(G)$，即 $\Phi(G)P \lhd G$.

如果 $N_G(P) < G$，则有 G 的极大子群 $M \geqslant N_G(P)$，由于 $P \in \mathrm{Syl}_p(\Phi(G)P)$，由文献[8]或[9]，有 $G = \Phi(G)PN_G(P)$. 利用 $\Phi(G) \leqslant M$ 及 $P \leqslant N_G(P) \leqslant M$，则得 $G = M$，与 M 的极大性矛盾，故 $N_G(P) = G$，即 $P \lhd G$. 因而 $P \lhd N$，故 N 为幂零的. 证毕.

引理 3　$\mathrm{Fit}(G/\Phi(G)) = \mathrm{Fit}(G)/\Phi(G)$.

---

* **收稿日期**：2008－09－01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(21679102)；贵州省教育厅自然科学基金资助项目(黔教科 2007069)；贵州省科技厅自然科学基金资助项目(2009GZ50966).
作者简介：曾利江(1962－　)，男，贵州人，副教授，主要从事代数与代数数论方面的研究.

证明 令 $\mathrm{Fit}(G/\Phi(G))=N/\Phi(G)$,则 $N\lhd G$. 由引理2知 N 是幂零的,从而 N 是 G 的幂零正规子群,有 $N\leqslant \mathrm{Fit}(G)$. 由 $\mathrm{Fit}(G)$ 的幂零性有 $\mathrm{Fit}(G)/\Phi(G)$ 幂零,即 $\mathrm{Fit}(G)/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的幂零正规子群,故有 $\mathrm{Fit}(G)/\Phi(G)\leqslant \mathrm{Fit}(G)/\Phi(G))=N/\Phi(G)$,即 $\mathrm{Fit}(G)\leqslant N$,于是有 $N=\mathrm{Fit}(G)$. 证毕.

引理4 $\mathrm{Fit}(G)=\cap\{C_G(H/K)\mid H/K$ 为 G 的主因子$\}$.

证明 令 $D=\cap\{C_G(H/K)\mid H/K$ 为 G 的主因子$\}$,则有 $D\lhd G$. 设 $1=H_0<H_1<H_2<\cdots<H_{r-1}<H_r=G$ 为 G 的1个主群列,则

$$1=D\cap H_0\leqslant D\cap H_1\leqslant D\cap H_2\leqslant\cdots\leqslant D\cap H_{r-1}\leqslant D\cap H_r=D \tag{1}$$

为 G 的1个正规群列. 因为 $D\leqslant C_G(H_i/H_{i-1})(i=1,2,\cdots,r)$,故 $[D,H_i]\leqslant H_{i-1}$,于是从 $D\cap H_i\leqslant H_i$ 知 $[D,D\cap H_i]\leqslant[D,H_i]\leqslant D\leqslant H_{i-1}$. 但 $[D,D\cap H_i]\leqslant D$,因而得 $[D,D\cap H_i]\leqslant D\cap H_{i-1}$. 这说明(1)式为 D 的1个中心列,故 D 是幂零群,故有 $D\leqslant\mathrm{Fit}(G)$.

反之,设 H/K 为 G 的1个主因子,即 H/K 为 G/K 的极小正规子群,则因为 $\mathrm{Fit}(G)K/K\lhd G/K$,从而有 $H/K\cap\mathrm{Fit}(G)K/K\lhd G/K$, 故有 $H/K\cap\mathrm{Fit}(G)K/K=1$ 或 $H/K\cap\mathrm{Fit}(G)K/K=H/K$. 但由 $H/K\cap\mathrm{Fit}(G)K/K=1$,有 $H\cap\mathrm{Fit}(G)K=K$,又有 $K(H\cap\mathrm{Fit}(G))=K$,再有 $H\cap\mathrm{Fit}(G)\leqslant K$,最后得:对任意 $f\in\mathrm{Fit}(G)$ 及任意 $h\in H$ 可导出 $f^{-1}h^{-1}fh\in H\cap\mathrm{Fit}(G)\leqslant K$,从而有 $\mathrm{Fit}(G)\leqslant C_G(H/K)$. 但由 $H/K\cap\mathrm{Fit}(G)K/K=H/K$ 有 $H/K\leqslant\mathrm{Fit}(G)K/K$,又有 $H/K\cap Z(\mathrm{Fit}(G)K/K)\neq1$(因为 $\mathrm{Fit}(G)K/K$ 幂零),再有 $H/K\leqslant Z(\mathrm{Fit}(G)K/K)$(因为 H/K 在 G/K 内极小正规). 因此,对任意 $f\in\mathrm{Fit}(G)$ 及任意 $h\in H$ 有 $f^{-1}h^{-1}fh\in K$(因为 $KhKf=kfKh$),从而 $\mathrm{Fit}(G)\leqslant C_G(H/K)$. 总之,不论为哪一种情况,都有 $\mathrm{Fit}(G)\leqslant C_G(H/K)$. 于是 $\mathrm{Fit}(G)\leqslant\cap\{C_G(H/K)\mid H/K$ 为 G 的主因子$\}=D$,所以 $\mathrm{Fit}(G)=D$. 证毕.

定义2 如果有限群 G 的主因子均为循环群,则称 G 为超可解群.

引理5 (1)超可解群的每个子群也是超可解的;(2)超可解群的每个同态像也是超可解的;(3)2个超可解群的直积仍为超可解群;(4)若 G 有2个正规子群 H 与 K,使 G/H 与 G/K 都是超可解的,则 $G/(H\cap K)$ 也是超可解的.

证明 这个定理的(1),(3),(4)在文献[10]中已经证明,下面只证(2).

设 σ 为 G 在 T 上的同态映射,于是 $1=G_0^\sigma\lhd G_1^\sigma\lhd G_2^\sigma\lhd\cdots\lhd G_r^\sigma=G^\sigma=T$ 是 T 的1个正规群列,商因子 $G_i^\sigma/G_{i-1}^\sigma$ 的特征可表述如下:令 $N=\ker\sigma$,则 $T\cong G/N,G_i^\sigma\cong G_iN/N$,故

$$\frac{G_i^\sigma}{G_{i-1}^\sigma}\cong\frac{G_iN/N}{G_{i-1}N/N}\cong\frac{G_iN}{G_{i-1}N}=\frac{G_i(G_{i-1}N)}{G_{i-1}N}\cong\frac{G_i}{G_i\cap G_{i-1}N}\cong\frac{G_i/G_{i-1}}{G_i\cap G_{i-1}N/G_{i-1}}.$$

于是从 G_i/G_{i-1} 为素数阶的循环知,$G_i^\sigma/G_{i-1}^\sigma$ 或平凡或为素数阶的,因此,从上述 T 的正规群列中删掉那些多余的项以后,剩下的就是 T 的一个主群列且有循环商因子,即 T 是超可解的. 证毕.

引理6 若 G 有1个正规循环子群 H 使相应的商群 G/H 为超可解群,则 G 是超可解群.

证明 设 $1=H_0\lhd H_1\lhd H_2\lhd\cdots\lhd H_r=H=G_0\lhd G_1\lhd\cdots\lhd G_s=G$ 为 G 的这样的主群列,使之为正规列 $1\lhd H\lhd G$ 的加细,若令在自然同态 $\sigma:G\sim G/H=\bar G$ 中用 $\bar A$ 表示 G 的子集 A 的像,则 $1=\bar G_0\lhd\bar G_1\lhd\bar G_2\lhd\cdots\lhd\bar G_{s-1}\lhd\bar G_s=\bar G$ 为 $\bar G$ 的正规群列($\bar G_i=G_i/H$). 由于 $G/G_i\cong\bar G/\bar G_i,G_{i+1}/G_i\cong(G_{i+1}/H)/(G_i/H)=\bar G_{i+1}/\bar G_i$,以及 G_{i+1}/G_i 在 G/G_i 内的极小正规性,可知 $\bar G_{i+1}/\bar G_i$ 为 G/G_i 的极小正规子群,因而 $\bar G$ 的上述正规群列实际上是 $\bar G$ 的主群列,从而由 $\bar G=G/H$ 的超可解性,得 $\bar G_{i+1}/\bar G_i$ 是循环的. 再由 $G_{i+1}/G_i\cong\bar G_{i+1}/\bar G_i$ 知 G_{i+1}/G_i 为循环的. 又由 H 本身的循环性得 H_i/H_{i-1} 也是循环的. 故由定义2知,G 为超可解群. 证毕.

引理7 设 V 为域 $\mathrm{GF}(p)$ 上 $n(\geqslant1)$ 维向量空间,令 G 为 V 的线性变换所成的交换群,其幂指数能整除 $p-1$. 若群 G 既约地作用在 V 上,即 V 没有非平凡的 $G-$ 不变子空间,则 $n=1$ 且 G 是循环的.

证明 对任意的 $g\in G$,由于 G 的每个元的阶整除 $p-1$,故 g 被多项式 $x^{p-1}-1$ 所零化,注意到由于 $(i,p)=1$ 有 $i^{p-1}\equiv1(\bmod p)$,故域 $\mathrm{GF}(p)$ 中除零元外每个元皆为多项式 $x^{p-1}-1$ 的零点,即多项式 $x^{p-1}-1$ 在域 $\mathrm{GF}(p)$ 中可分解为1次因式之积:$x^{p-1}-1=(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))$. 因为 g 的最小多项式 $m(x)$ 为 $x^{p-1}-1$ 的因式,故 $m(x)$ 在域 $\mathrm{GF}(p)$ 中亦可分解为一次因式之积,即 $m(x)$ 为 $x-1,x-2,\cdots,$

$x-(p-1)$ 中若干项的积，这说明 $m(x)$ 至少有一零点在域 $GF(p)$ 内. 然而 $m(x)$ 的零点是 g 的特征根，故线性变换 g 有一个特征根 $\lambda \neq 0$ 在域 $GF(p)$ 内. 因为 λ 是 g 的一个特征根，V 的子空间 $W = \{v \mid vg = \lambda v\}$ 非零，取任意 $x \in G$ 及任意的 $v \in W$，则 $vxg = vgx = \lambda vx$，从而 $vx \in W$，故 W 是 V 的一个非零的 $G-$ 不变子空间，于是 G 的既约作用在 V 上导致 $V = W$.

若令 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基，则任意的 $v \in V$ 可写为 $v = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i (k_i \in GF(p))$，且有 $vg = \lambda v$，故对每个 e_i 也有 $e_i g = \lambda e_i$. 从而如上所述有 $e_i xg = \lambda e_i x$，因此每个 e_i 生成的子空间 $\langle e_i \rangle$ 都是 $G-$ 不变的，故从 G 的既约作用在 V 上可知每个 $\langle e_i \rangle = V$. 即 V 是 $1-$ 维的或 $n=1$，既然 $n=1$，即 $V=\langle e \rangle$，且因为对每个 $g_i \in G$ 有相应的一个 $\lambda_i \in GF(P)$ 使 $eg_i = \lambda_i e$. 作 G 到 $GF(p)$ 内的映射 $\alpha: g_i \to g_i = \lambda_i$，由

$$e(g_1 g_2) = (eg_1)g_2 = (\lambda_1 e)g_2 = \lambda_1 (eg_2) = \lambda_1 \lambda_2 e$$

可知映射 $\alpha: g_1 g_2 \to (g_1 g_2)^{\alpha} = \lambda_1 \lambda_2 = g_1^{\alpha} g_2^{\alpha}$. 又因为当 $g_1 \neq g_2$ 时由线性变换不等的意义得 $eg_1 \neq eg_2$，从而必有 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，这说明由 $g_1 \neq g_2$ 必有 $g_1^{\alpha} \neq g_2^{\alpha} (\lambda_1 \neq \lambda_2)$，亦即映射 α 为 G 与 $GF(p)$ 的乘群的某个子群同构，故由 $GF(p)$ 的乘群的循环性得 G 是循环的. 证毕.

注 1　引理 7 翻译为群论的语言即：如果 V 为 p^n 阶初等交换 $p-$ 群，$G \leqslant \mathrm{Aut}(V)$，且 G 交换而幂指数能整除 $p-1$，且 V 的 $G-$ 不变子群只有单位元群与 V 自身，则 $n=1$，且 G 是循环的.

引理 8　设 H/K 为 G 的一个 $p-$ 主因子，则 $|H/K| = p$ 的充要条件是 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 为幂指数能整除 $p-1$ 的交换群.

证明　设 $H/K \cong Z_p$，则 $\mathrm{Aut}_G(H/K) \cong \mathrm{Aut}(Z_p) \cong Z_{p-1}$ 为 $p-1$ 阶循环环，因此 $\mathrm{Aut}_G(H/K) \leqslant \mathrm{Aut}(H/K)$，故 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 有交换性且幂指数能整除 $p-1$.

反之，设 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 为交换的且其幂指数整除 $p-1$. 由于 H/K 为 G/K 的极小正规且又为 $p-$ 群，H/K 也是初等交换 $p-$ 群. 假如 H/K 有非平凡的 $\mathrm{Aut}_G(H/K)-$ 不变真子群 L/K，即 $K < L < H$ 具有性质：对任意 $x \in G$ 可使 $(Kl)f_x = Kx^{-1}lx \in L/K$(对任意 $l \in L$). 则 $x^{-1}lx \in L$，即 $x^{-1}Lx = L$，故 $L \lhd G$，即 H/K 不是 G/K 的极小正规子群，与题设矛盾. 于是 H/K 没有非平凡的 $\mathrm{Aut}_G(H/K)-$ 不变真子群，即 H/K 的 $\mathrm{Aut}_G(H/K)-$ 不变子群只能是单位群与 H/K 自身，于是由引理 7 知，H/K 为 $p-$ 阶循环. 证毕.

引理 9　有限可解群 G 为超可解的充要条件是对每个素数 p，G 的每个 $p-$ 主因子 H/K，$\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 为幂指数能整除 $p-1$ 的交换群.

证明　由 G 为超可解群有 G 的主因子都是素数阶的，故 $p-$ 主因子 H/K 的阶 $|H/K| = p$. 由引理 8 知 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 是幂指数能整除 $p-1$ 的交换群.

反之，对任意素数 p 及 G 的每一个 $p-$ 主因子 H/K，$\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 为幂指数能整除 $p-1$ 的交换群. 因为 $H/K(\cong Z_p)$ 循环，由引理 8 知 $|H/K| = p$. 由 G 的可解性有 G 的每个主因子为某素数 p 的 $p-$ 群，因此 G 的每个主因子循环，故 G 为超可解群. 证毕.

定义 3　设 p 为一素数，当群 G 的 Sylow $p-$ 子群 G_p 为正规的且商群 G/G_p 是幂指数能整除 $p-1$ 的交换群，则称 G 为强 $p-$ 闭的.

由定义 3 有：群的强 $p-$ 闭性质对子群、商群及同态像仍然保持.

下面证明本文的主要结果.

定理 1　若群 G 的每个极大子群的指数都是素数，则 G 是超可解群.

证明　先证 G 可解. 设 p 为 $|G|$ 的最大素因数，令 $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 如果 G_p 不正规于 G，则 $N_G(G_p) < G$. 从而 G 有一个极大子群 M 使 $N_G(G_p) \leqslant M < G$. 由 Sylow 定理可知 $|G:N_G(G_p)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 又因为 $G_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$，以及 $N_M(G_p) = N_G(G_p) \cap M = N_G(G_p)$，故由 $|M:N_M(G_p)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ 可得 $|M:N_G(G_p)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$，从而由 $|G:M||M:N_G(G_p)| = |G:N_G(G_p)|$ 有 $|G:M| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 但由假设 $|G:M| = q$ 为素数，且 $q \leqslant p$，这与 $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ 矛盾，于是有 $G_p \lhd G$. 对群的阶作归纳法又有 G/G_p 可解，因而 G 自身可解.

再证 G 超可解. 设 H 为 G 的一个极小正规子群，由 G 的可解性有 H 为初等交换 $p-$ 群(p 是某个素数)，

这里的p不一定是$|G|$的最大素因数. 由归纳假设知G/H超可解. 若K为G的另一个极小正规子群,又知G/K超可解,于是由引理5得$G/H\cap K\cong K$超可解. 因此,下面只需讨论H为G的唯一一个极小正规子群,这时$\mathrm{Fit}(G)$是$p-$群.

如果H不包含于$\Phi(G)$,则G有不包含H的极大子群M,因此有$G=HM$. 但由$H\cap M\lhd M$及H的交换性有$H\cap M\lhd H$,故$H\cap M\lhd G$. 因此$H\cap M=1$或者$H\cap M=H$. 但由$H\cap M=H$有$H\leqslant M$,矛盾. 故只能$H\cap M=1$,于是有$|G:M|=|H|$,故由$|G:M|$为素数可知$|H|=p$,H循环. 由引理6,从G/H的超可解性得G超可解.

剩下要考虑的是$H\leqslant\Phi(G)$的情况. 这时,考虑自然同态$G\sim G/\Phi(G)=\bar{G}$. 由归纳假设,$\bar{G}=G/\Phi(G)$是超可解的. 由引理3,$\mathrm{Fit}(\bar{G})=\mathrm{Fit}(G)/\Phi(G)$可导出$\mathrm{Fit}(\bar{G})$是$p-$群,又有$\bar{G}$超可解$\Rightarrow\bar{G}'$幂零$\Rightarrow\bar{G}'\leqslant\mathrm{Fit}(\bar{G})\Rightarrow\bar{G}'$是$p-$群. 作$\bar{G}$的主群列$\bar{G}>\cdots>\bar{A}>\bar{B}>\cdots>1$,设$|\bar{A}/\bar{B}|=q$(素数)与$p$互素. 对任意$\bar{g}\in\bar{G}$及任意$\bar{a}\in\bar{A}$,从$\bar{A}\lhd\bar{G}$知$[\bar{g},\bar{a}]\in\bar{A}\Rightarrow[\bar{g},\bar{a}]^q\in\bar{B}$. 又由$[\bar{g},\bar{a}]\in\bar{G}'$($p$群)有$[\bar{g},\bar{a}]^{p^t}=1\in\bar{B}(t\in N)$;故由$(p,q)=1$即可知$[\bar{g},\bar{a}]\in\bar{B}$,即由$\bar{G}\leqslant C_{\bar{G}}(\bar{A}/\bar{B})$必有$\bar{G}=C_{\bar{G}}(\bar{A}/\bar{B})$. 故证得对于$\bar{G}$的每个阶与$p$互素的主因子$\bar{A}/\bar{B}$都有$\bar{G}=C_{\bar{G}}(\bar{A}/\bar{B})$,由引理4得$\mathrm{Fit}(\bar{G})=\cap\{C_{\bar{G}}(H/K)\mid H/K$为$\bar{G}$中阶$p$的主因子$\}$,加之$\bar{G}$超可解可导出$\mathrm{Aut}_{\bar{G}}(H/K)\cong\bar{G}/C_{\bar{G}}(H/K)$为幂指数能整除$p-1$的交换群(引理9和引理1),因而这样一些$\bar{G}/C_{\bar{G}}(H/K)$的直积$Q$也是幂指数能整除$p-1$的交换群. 由于$\bar{G}/\mathrm{Fit}(\bar{G})$与$Q$的某子群同构,故$\bar{G}/\mathrm{Fit}(\bar{G})$是幂指数能整除$p-1$的交换群;又因为$G\sim\bar{G}=G/\Phi(G)$中$\mathrm{Fit}(\bar{G})$的原像为$\mathrm{Fit}(G)$[$\mathrm{Fit}(\bar{G})=\mathrm{Fit}(G/\Phi(G))=\mathrm{Fit}(G)/\Phi(G)$],故$G/\mathrm{Fit}(G)\cong\bar{G}/\mathrm{Fit}(\bar{G})$,这说明由$G/\mathrm{Fit}(G)$是幂指数能整除$p-1$的交换群有$G'\leqslant\mathrm{Fit}(G)$. 然而$\mathrm{Fit}(G)$为$p-$群以及$\mathrm{Fit}(G)\lhd G$又说明$\mathrm{Fit}(G)\leqslant$每个$G_p\in\mathrm{Syl}_p(G)$,故有$G'\leqslant$每个$G_p$,从而由$G_p\lhd G$得$G_p$是唯一的,于是由$\mathrm{Fit}(G)\leqslant G_p$有$G/G_p\cong(G/\mathrm{Fit}(G))/(G_p/\mathrm{Fit}(G))$,故$G/G_p$为幂指数能整除$p-1$的交换群,即$G$是强$p-$闭的,故$G$超可解. 证毕.

参考文献:

[1] 张荣华,李秀妮. 关于弱P-正则半群的一个注记[J]. 云南大学学报:自然科学版,2000,22(2):12-16.

[2] 王国栋,叶锐,陆正福. 一般有限域GF(p^m)上线性码的自同构群[J]. 云南大学学报:自然科学版,2004,26(1):17-23.

[3] 王国栋,杨 洋,陆正福. 二次剩余码的自同构群[J]. 云南大学学报:自然科学版,2004,26(2):19-25.

[4] 李士恒,施武杰,梁登峰. 子群的θ-偶和群的结构[J]. 数学学报:中文版,2008,51(3):89-95.

[5] 曾吉文. Cartan 矩阵,分解数与单模的顶[J]. 数学学报:中文版,2002,45(1):89-99.

[6] 曾吉文. 关于 Cartan 矩阵的对称性[J]. 厦门大学学报:自然科学版,1999,38(1):12-18.

[7] 姜友谊. 最高阶元素个数为44和52的有限群[J]. 河北大学学报:自然科学版,2004,24(2):4-10.

[8] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 2版. 北京:科学出版社,2007.

[9] 张远达. 有限群构造[M]. 北京:科学出版社,1982.

[10] 曾利江. 等链群与超可解群的等价性[J]. 河北大学学报:自然科学版,2008,28(6):12-16.

Group with prime index of each maximal subgroups

ZENG Li-jiang, WENG Xiao-yong

(Department of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi 563002, China)

Abstract: Firstly, some new concepts of $p-$principal divisor, supersolvable group and strictly $p-$closed group are introduced. Then, some properties about them are proved. Finally, the group with prime index of each maximal subgroups should be supersolvable group is proved.

Key words: $p-$principal divisor; supersolvable group; strictly $p-$closed group; principal group sequence