云南大学学报（自然科学版），2009，31（5）：439~443　　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

广义行(列)酉对称矩阵的满秩分解及其 Moore-Penrose 逆*1

袁晖坪，米　玲
（重庆工商大学 数学与统计学院，重庆　400067）

摘要：提出了广义行(列)酉对称矩阵的概念，研究了它们的性质，得到了一些新的结果，给出了广义行(列)酉对称矩阵的满秩分解、秩分解和广义逆的公式，减少了它们的计算量与存储量，又不会降低数值精度. 同时推广了有关文献的相应结果，拓宽了实际应用领域的范围.

关键词：广义行(列)酉对称矩阵；满秩分解；广义逆；信号处理
中图分类号：O 151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258-7971(2009)05-0439-05

满秩分解是矩阵的基本分解方法之一，在求广义逆矩阵时起着重要的作用. 矩阵的满秩分解及 Moore-Penrose 逆在信号处理、系统科学、神经网络、自动控制、统计学、最优化问题及工程应用问题等领域不仅有广泛的实际应用，而且也有重要的理论研究价值[1~7]. 许多应用领域(如信息、控制、工程等)中大量出现的都是关于行、列或对角线的对称图象(矩阵)，人们研究矩阵，一般都从主对角线方向考虑问题(如对角化、正定性等)；至于次对角线方向和行(列)对称的情形常被忽略，但关于行(列)对称的矩阵理论[5~11]和次对角线方向的矩阵理论[12,13]等同样是有用的. 例如计算机对具有对称性质的图像进行采样，所得到的数据矩阵具有某种广义行或列对称性. 当矩阵维数很大时，若用计算机直接对数据矩阵分解，则计算量大，效率很低. 若能找到矩阵中某一部分与其它部分之间的一些定量关系，那么问题便很容易解决[5~11]. 又如在模拟电路的波形松弛算法中也要根据矩阵的结构对矩阵进行分解[14]，因此寻找矩阵中某一部分和其它部分之间的结构关系就非常重要. 文献[5~7]对行(列)对称矩阵或酉对称矩阵的满秩分解及Moore-Penrose 逆作了大量研究，给出了很多深刻而有意义的结果，文献[8~11]对行(列)对称矩阵的 QR 分解或奇异值分解作了深入研究，获得了很多深刻而应用广泛的结果. 本文在此基础上进一步提出了广义行(列)酉对称矩阵的概念，研究了它们的性质，得到了一些新的结果，给出了广义行(列)酉对称矩阵的满秩分解、秩分解和广义逆的公式，大大减少了它们的计算量与存储量，又不会降低数值精度. 推广了文献[5~7]的相应结果，拓宽了实际应用领域的范围. 这无论是对于矩阵理论或应用都是很有意义的. 本文用 A^{H} 表示矩阵 A 的共轭转置矩阵，$C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 复矩阵集 $C_r^{m\times n}$ 表示秩为 r 的 $m\times n$ 复矩阵集，$A^{\{i\}}$ 表示 A 的 $\{i\}$ 逆，特别记 $A^{\{1,2,3,4\}}=A^{+}$.

1　广义行(列)酉对称矩阵的概念与性质

定义 1　设 $A\in C^{m\times n}$，$Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1}$ 均为 m 阶酉矩阵，则称

$$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})=\begin{bmatrix}A\\A_1\\\vdots\\A_{k-1}\end{bmatrix}\qquad(\text{其中 }A_i=Q_iA,i=1,2,\cdots,k-1)$$

---

* 收稿日期：2008-11-23
基金项目：重庆市自然科学基金资助项目(CSTS 2005 BB 0243)；重庆市教委科技项目基金资助项目(KJ0707023).
作者简介：袁晖坪(1958-　)，男，重庆人，教授，主要从事矩阵论方面的研究.

为 A 的 k 次广义行酉对称矩阵,A 称为它的母矩阵.

特别,当 $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{k-1} = Q$ 时,简记 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = R_k(A;Q)$.

定义 2 设 $A \in C^{m\times n}$,$Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1}$ 均为 n 阶酉矩阵,则称

$$C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = (A,A_2,\cdots,A_{k-1}) \qquad (\text{其中 } A_i = AQ_i, i = 1,2,\cdots,k-1)$$

为 A 的 k 次广义列酉对称矩阵,A 称为它的母矩阵.

特别,当 $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{k-1} = Q$ 时,简记 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = C_k(A;Q)$.

显然:当 $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{k-1} = J$(单位反对角矩阵)时,

$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = R_k(A;J)$ 即为文献[8]中的“A 的 k 次行周期对称矩阵”;

$C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = C_k(A;J)$ 即为文献[8]中的“A 的 k 次列周期对称矩阵”;

当 $Q_1 = J_1, Q_2 = J_2,\cdots,Q_{k-1} = J_{k-1}$ 时,

$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = C(A;J_1,\cdots,J_{k-1})$ 即为文献[8]中的“A 的 k 次行对称矩阵”;

$C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = C(A;J_1,\cdots,J_{k-1})$ 即为文献[8]中的“A 的 k 次列对称矩阵”;

当 $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{k-1} = I$(单位矩阵)时,

$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = R_k(A) = \begin{bmatrix} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix}$ 即为文献[9]中的“A 的第一类 k 次行延拓”;

$C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = C_k(A) = (A,A,\cdots,A)$ 即为文献[9]中的“A 的第一类 k 次列延拓”;

当 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{k-1}$ 均为酉变换矩阵[10]时,

$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$ 即为文献[6]或[10]中的“A 的行酉对称矩阵”;

$C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$ 即为文献[6]或[10]中的“A 的列酉对称矩阵”.

由上述定义易得以下性质:

(1) $\operatorname{rank} R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = \operatorname{rank} C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = \operatorname{rank} A$;

(2) $[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\mathrm{H}} = C(A^{\mathrm{H}};Q_1^{\mathrm{H}},\cdots,Q_{k-1}^{\mathrm{H}})$;

$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\mathrm{H}} = R(A^{\mathrm{H}};Q_1^{\mathrm{H}},\cdots,Q_{k=1}^{\mathrm{H}})$;

(3) 设 $X \in C^{m\times m}$,$Y \in C^{n\times n}$,则

$R(AY;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})Y$,

$C(XA;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = XR(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$.

2 广义行(列)酉对称矩阵的满秩分解

定理 1(满秩分解) 设 $A \in C_r^{m\times n}$ 的满秩分解为 $A = FG(F \in C_r^{m\times r}, G \in G_r^{r\times n})$,则广义行酉对称矩阵 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) \in C^{km\times n}$ 的满秩分解为 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = \begin{bmatrix} F \\ Q_1F \\ \vdots \\ Q_{k-1}F \end{bmatrix} G$.

证明 由条件有 $\begin{bmatrix} F \\ Q_1F \\ \vdots \\ Q_{k-1}F \end{bmatrix} \in C_r^{km\times r}$,$G \in C_r^{r\times n}$ 使得

$$\begin{bmatrix} F \\ Q_1F \\ \vdots \\ Q_{k-1}F \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} FG \\ Q_1FG \\ \vdots \\ Q_{k-1}FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ Q_1A \\ \vdots \\ Q_{k-1}A \end{bmatrix} = R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}).$$

证毕.

定理 2(满秩分解)　设 $A \in C_r^{m\times n}$ 的满秩分解为 $A = FG(F \in C_r^{m\times r}, G \in C_r^{r\times n})$,则广义列酉对称矩阵 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) \in C^{m\times kn}$ 的满秩分解为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = F(G,GQ_1,\cdots,GQ_{k-1})$.

证明　由条件有 $(G,GQ_1,\cdots,GQ_{k-1}) \in C_r^{r\times kn}, F \in C_r^{m\times r}$ 使得

$F(G,GQ_1,\cdots,GQ_{k-1}) = (FG,FGQ_1,\cdots,FGQ_{k-1}) = (A,AQ_1,\cdots,AQ_{k-1}) = C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$.

证毕.

定理 1、定理 2 分别推广了文献[5,6]中的定理 1、定理 2 及[7]中的定理 5 与定理 7.

定理 3(秩分解)　已知广义行酉对称矩阵 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) \in C^{km\times n}(m \geqslant n)$, $A \in C_r^{m\times n}$,若存在 $G \in C_m^{m\times m}$, $F \in C_n^{n\times n}$,使得 $GAF = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,则存在

$$G_1 = \begin{bmatrix} G & 0 & \cdots & 0 \\ G & -GQ_1^{\mathrm{H}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G & 0 & \cdots & -GQ_{k-1}^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \in C_{km}^{km\times km},$$

使得 $G_1R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})F = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

证明　由条件有 $|G_1| = (-1)^{(k-1)m}|G|^k||Q_1^{\mathrm{H}}|\cdots Q_{k-1}^{\mathrm{H}}| \neq 0$,所以 G_1 可逆且

$$G_1R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})F = G_1\begin{bmatrix} A \\ Q_1A \\ \vdots \\ Q_{k-1}A \end{bmatrix}F = \begin{bmatrix} GAF \\ (GA - GAQ_1^{\mathrm{H}}Q_1)F \\ \vdots \\ (GA - GAQ_{k-1}^{\mathrm{H}}Q_{k-1})F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GAF \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

证毕.

定理 4(秩分解)　已知广义列酉对称矩阵 $C(Q;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) \in C^{m\times kn}(n \geqslant m)$, $A \in C_r^{m\times n}$,若存在 $G \in C_m^{m\times m}$, $F \in C_n^{n\times n}$,使得 $GAF = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,则存在

$$F_1 = \begin{bmatrix} F & F & \cdots & F \\ 0 & -Q_1^{\mathrm{H}}F & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -Q_{k-1}^{\mathrm{H}}F \end{bmatrix} \in C_{kn}^{kn\times kn},$$

使得 $GC(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})F_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

证明　由条件有 $|F_1| = (-1)^{(k-1)n}|F|^k|Q_1^{\mathrm{H}}|\cdots|Q_{k-1}^{\mathrm{H}}| \neq 0$,所以 F_1 可逆且

$GC(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})F_1 = G(A,AQ_1,\cdots,AQ_{k-1})F_1 = (GAF,(GA - GAQ_1Q_1^{\mathrm{H}})F,\cdots,$

$(GA - GAQ_{k-1}Q_{k-1}^{\mathrm{H}})F) = (GAF,0,\cdots,0) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

证毕.

定理 3 与定理 4 分别推广了文献[7]的定理 9 与定理 11.

3　广义行(列)酉对称矩阵的广义逆

定理 5　(1) $A \in C^{m\times n}$ 的 k 次广义行酉对称矩阵为 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$ 的 Moore - Penrose 逆:

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^+ = \frac{1}{k}C(A^+;Q_1^{\mathrm{H}},\cdots,Q_{k-1}^{\mathrm{H}});$$

(2) $A \in C^{m\times n}$ 的 k 次广义列酉对称矩阵为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$ 的 Moore - Penrose 逆:

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^+ = \frac{1}{k}C(A^+;Q_1^H,\cdots,Q_{k-1}^H).$$

证明 设 $A \in C_r^{m\times n}$ 的满秩分解为 $A = FG(F \in C_r^{m\times r}, G \in C_r^{r\times n})$,则 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$ 的满秩分解为

$$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = \begin{bmatrix} F \\ Q_1 F \\ \vdots \\ Q_{k-1}F \end{bmatrix} G,$$

$C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$ 的满秩分解为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}) = F(G\ GQ_1 \cdots GQ_{k-1})$,于是由文献[4]第88页性质(11)知:$A^+ = G^H(GG^H)^{-1}(F^H F)^{-1}F^H$,

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^+ = G^H(GG^H)^{-1}\left[\begin{bmatrix} F \\ Q_1 F \\ \vdots \\ Q_{k-1}F \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} F \\ Q_1 F \\ \vdots \\ Q_{k-1}F \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} F \\ Q_1 F \\ \vdots \\ Q_{k-}F \end{bmatrix} =$$

$$G^H(GG^H)^{-1}[kF^H F]^{-1}(F^H, F^H Q_1^H, \cdots, F^H Q_{k-1}^H) =$$

$$\frac{1}{k}(A^+, A^+ Q_1^H, \cdots, A^+ Q_{k-1}^H) = \frac{1}{k}C(A^+;Q_1^H,\cdots,Q_{k-1}^H);$$

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^+ = (G, GQ_1, \cdots, GQ_{k-1})^H \left[(G, GQ_1, \cdots, GQ_{k-1})\begin{bmatrix} G^H \\ Q_1^H G^H \\ \vdots \\ Q_{k-1}^H G^H \end{bmatrix}\right]^{-1} (F^H F)^{-1} F^H =$$

$$\begin{bmatrix} G^H \\ Q_1^H G^H \\ \vdots \\ Q_{k-1}^H G^H \end{bmatrix}[kGG^H]^{-1}(F^H F)^{-1}F^H = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} A^+ \\ Q_1^H A^+ \\ \vdots \\ Q_{k-1}^H A^+ \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{k}R(A^+;Q_1^H,\cdots,Q_{k-1}^H).$$

证毕.

定理5推广了文献[5]的定理8及文献[6]的定理3.

推论1 $\forall \eta \subseteq \{1,2,3,4\}$,均有

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^\eta = \frac{1}{k}C(A^\eta;Q_1^H,\cdots,Q_{k-1}^H),$$

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^\eta = \frac{1}{k}R(A^\eta;Q_1^H,\cdots,Q_{k-1}^H).$$

推论1将广义行(列)酉对称矩阵的各种广义逆的表述形式统一了起来.

4 结束语

本文进一步推广了行(列)对称矩阵与酉对称矩阵的概念,给出了广义行(列)酉对称矩阵的满秩分解、秩分解和广义逆的公式及快速算法,用母矩阵代替广义行(列)酉对称矩阵进行满秩分解、秩分解与算广义逆,既能大大减少计算量和储存量,又不会丧失数值精度,同时推广了文献[5~7]的相应结果,拓宽了实际应用领域的范围.

参考文献:

[1] PAIGE C C,SAUNDERS M A. Towards a generalized singular value decomposition[J]. SIAM J Numer Anal,1981,18:398-405.

[2] ROHDE C A. Generalized inverses of partitioned matrices [J]. SIAM J Appl Math,1965,13:1 033-1 035.

[3] PRINGLE R M, RAYNER A A. Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models [J]. SIAM Review, 1970, 12: 107-115.
[4] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
[5] 王震, 蔺小林, 蒋耀林. 行(或列)对称矩阵的满秩分解及其算法[J]. 高等学校计算数学学报, 2005, 27: 287-295.
[6] 王震, 蔺小林. 酉对称矩阵的满秩分解及其算法[J]. 西安科技大学学报, 2006, 26(3): 426-430.
[7] 袁晖坪. 行(列)对称矩阵的满秩分解和正交对角分解[J]. 上海理工大学学报, 2007, 29(3): 260-264.
[8] 邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 行(或列)对称矩阵的 QR 分解[J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(9): 842-849.
[9] 邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 科学通报, 2000, 45(14): 1 560-1 562.
[10] 蔺小林, 蒋耀林. 酉对称矩阵的 QR 分解及其算法[J]. 计算机学报, 2005, 28(5): 818-822.
[11] 袁晖坪. 行(列)反对称矩阵的奇异值分解[J], 云南大学学报: 自然科学版, 2007, 29(5): 449-452.
[12] 袁晖坪. 次亚正定矩阵[J]. 数学杂志, 2001, 21(1): 29-32
[13] 李耀堂, 刘庆兵. 非 Hermite 正定矩阵与正稳定矩阵[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2002, 24(3): 164-166.
[14] JING Y L, CHEN R M M, WING O. Improving convergence performance of relaxation- based transient analysis by matrix splitting in circuit simulation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I, 2001, 48(6): 769-780.

The full rank factorization and Moore-Penrose inverse for generalized row (column) unitary symmetric matrix

YUAN Hui-ping, MI Ling
(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The concept of generalized row (column) unitary transposed matrix is introduced and analyzed, which leads to some new results. In addition, the formula of the full rank factorization and rank factorization and generalized inverse of generalized row (column) unitary symmetric matrix are given, which makes calculation easier and accurate. Results of papers are generalized.

Key words: generalized row (column) unitary symmetric matrix; full rank factorization; generalized inverse; signal processing

*

(上接第 438 页)

[12] LIU J, WANG M. Homogeneous Grobner bases under composition[J]. J Algebra, 2006, 303: 668-676.
[13] LIU J, WANG M. Further results on Homogeneous Grobner bases under composition[J]. J Algebra, 2007, 315: 134-143.
[14] 陈小松, 唐胜. Noether 整环上不同项序下的复合 Groebner 基[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2008, 30(4): 1-5.
[15] 刘哲, 黄晓红, 潘江敏. 剩余类环上的置换多项式[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(1): 1-3.

Composed Groebner basis over Noetherian domain

CHEN Xiao-song, TANG Sheng
(School of Mathematical Sciences and Computational Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: For Groebner basis in n variables and composition in m ($m \geqslant n$) variables in a polynomial ring over Noetherian domain, it is proved that Groebner basis computation and composition is commutative if composition is compatible with two term orderings on the different polynomial rings and composition is a lists of monic polynomials with its leading powering products is the products of permuted powering and powering products of other remained variables by using S-polynomial and syzygy condition. Therefore, minimal Groebner basis computation is also commutative with composition under this condition. Especially, Groebner basis computation and composition is commutative if composition is compatible with term orderings and composition is a lists of monic polynomials with its leading powering product is a permuted powering when $m = n$.

Key words: noetherian domain; composed Groebner basis; syzygy condition; S-polynomials; permuted powering