doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2012.01.010

基于 Chebyshev 多项式逼近的分数阶微积分数值算法

陈 安, 李常品

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 基于 Chebyshev 多项式逼近,建立关于分数阶积分与 Caputo 型分数阶微分的数值算法. 对分数阶积分提出新的计算格式,对 Caputo 型分数阶微分则推广了原有的数值方法,并分别给出相应的误差估计. 最后,通过数值例子说明了构造算法的有效性.

关键词: Chebyshev 多项式;分数阶;逼近

中图分类号: O 241.82 **文献标志码**: A **文章编号**: 1007-2861(2012)01-0048-06

Numerical Algorithm for Fractional Calculus Based on Chebyshev Polynomial Approximation

CHEN An, LI Chang-pin

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: Numerical algorithms based on Chebyshev polynomial approximation are proposed, including a numerical algorithm for fractional integral and a generalized numerical algorithm for fractional derivative. Error estimates are given. Numerical examples show effectiveness of the methods.

Key words: Chebyshev polynomial; fractional; approximation

分数阶微积分拥有长达 300 多年的历史, 但直到近几十年才得到快速发展[1]. 这主要是因为分数阶能够比整数阶更好地刻画现实中的复杂模型,尤其是对一些具有记忆与遗传性质的物质的刻画[2]. 不过也正因为分数阶微分的非局部性,导致了其数值计算的困难. Diethelm 等[3] 总结了关于分数阶微积分的几种常见的数值算法,本质上是利用函数的线性插值来构造相应的数值公式. Yuan 等[4] 构造了一种新的数值格式,这种格式能有效地避免因分数阶微分的非局部性而引起的高计算复杂度. 之后, Diethelm[5] 对该格式进行了改进,改进方法的主要思想是把原问题转化为更易求解的积分问题,然后利用 Gauss 公式求解. 为了得到更高阶的算法, Miyakoda 等[6-8] 基于 Chebyshev 多项式建立了一种新数值格式, 然而, 他们仅讨论了分数阶微分 $D_{0,t}^{\alpha}f(t)$ 在 $0<\alpha<1$ 时的情况. Li 等[9] 基于插值函数,对分数阶微积分提出了几种新的有效数值算法. 关于分数阶偏微分方程的有限元方法可参见文献[10-12],其中文献[11]是关于分数阶偏微分方程间断有限元方法的早期工作,文献[12]是关于分数阶超扩散问题有限元方法的早期工作.

本工作基于 Chebyshev 多项式逼近建立了高阶

收稿日期:2010-11-25

基金项目:上海市教委科研创新重点资助项目(12ZZ084);上海市重点学科建设资助项目(S30104)

通信作者:李常品(1968 ~),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为分数阶微分方程的数值方法、分岔混沌的应用理论和计算. E-mail: lcp@shu.edu.cn

的分数阶积分与 Caputo 型分数阶导数的数值算法，推广了文献[6-8]中 α 的应用范围.

下面，首先给出 2 个相关的基本定义.

定义 1　关于函数 $f(t)$ 分数阶积分的定义如下：

$$J_{a,t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \alpha > 0. \quad (1)$$

定义 2　关于函数 $f(t)$ 的 Caputo 型分数阶导数的定义如下：

$$_{C}D_{a,t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$t > a,\ m-1 < \alpha < m \in \mathbf{Z}^{+}. \quad (2)$$

1　分数阶微积分数值算法的建立

为了简便起见，对式(1)和(2)仅考虑 $a=0$ 及 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时的情况，其中对式(2)只讨论 $m=2$ 时的情况($m=1$ 时的情况可参见文献[7-8]).

1.1　分数阶积分数值算法

利用移位 Chebyshev 多项式 $T_k(2t-1)$ 对式(1)中的 $f(t)$ 进行逼近[7-8]，有

$$f(t) \approx p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(2t-1),$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad (3)$$

式中，

$$a_k = \frac{\delta_k}{n}\left\{f(t_0) + f(t_n)\cos(k\pi) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\cos\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right\},$$
$$\delta_k = 1, k = 0,1,\cdots,n-1, \delta_n = 0.5, \quad (4)$$

其中插值节点为

$$t_i = \frac{1+\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)}{2}.$$

Chebyshev 多项式 $T_k(x)$ 可用如下递归公式得到：

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

将式(3)代入式(1)，有

$$J_{0,t}^{\alpha}f(t) \approx J_{0,t}^{\alpha}p_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}p_n(\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (5)$$

为了得到式(5)的具体表示，给出下面的引理.

引理 1　记 p_n 为式(3)的 n 次多项式，则存在相应的阶数为 n 的多项式 L_n，满足

$$\int_x^t (p_n(t) - p_n(\tau))(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau = (L_n(t) - L_n(x))(t-x)^{\alpha}. \quad (6)$$

证明　对 $p_n(\tau)$ 在 t 处 Taylor 展开，有

$$\int_x^t (p_n(t) - p_n(\tau))(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau =$$
$$\int_x^t \left(p_n(t) - \left(p_n(t) + (\tau - t)p_n'(t) + \cdots + \frac{(\tau-t)^n}{n!}p_n^{(n)}(t)\right)\right)(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau =$$
$$\int_x^t \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(t-\tau)^i(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau =$$
$$(t-x)^{\alpha}\sum_{i=1}^{n} A_i(t)\frac{(t-x)^i}{\alpha+i},$$

式中，取 $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i(t)\frac{(t-x)^i}{\alpha+i}$，即可得证.

首先，在引理 1 中取 $x=0$ 并对其化简，得到

$$\int_0^t p_n(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau = t^{\alpha}\left(\frac{p_n(t)}{\alpha} - L_n(t) + L_n(0)\right). \quad (7)$$

然后，式(6)两边同时对 x 求导，整理，有

$$p_n(t) - p_n(x) = L_n'(x)(t-x) + (L_n(t) - L_n(x))\alpha. \quad (8)$$

不妨设 $L_n'(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i T_i(2x-1)$，$0\leqslant x\leqslant 1$，对该式两边同时在 $[x,t]$ 上求积，整理，得

$$L_n(t) - L_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1} - b_{i+1}}{4i}(T_i(2t-1) - T_i(2x-1)),$$
$$b_{n+1} = b_n = 0. \quad (9)$$

由式(7)可知

$$(2x-1)L_n'(x) = \frac{b_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1} + b_{i-1})T_i(2x-1), \quad (10)$$

从而

$$L_n'(x)(t-x) = \frac{(2t-1)b_0 - b_1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}(2(2t-1)b_i - b_{i+1} - b_{i-1})T_i(2x-1). \quad (11)$$

将式(3)，(9)及(11)代入式(8)，得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(T_i(2t-1) - T_i(2x-1)) = \frac{(2t-1)b_0 - b_1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}(2(2t-1)b_i - b_{i+1} - b_{i-1})T_i(2x-1) +$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}-b_{i+1}}{4i}(T_i(2t-1)-T_i(2x-1)).\quad(12)$$

注意到,只需知道式(9)中 b_i 的值便可以推导出分数阶积分的数值表达式,因此,对比式(12)中左右两边 $T_i(2x-1)(i=1,2,\cdots,n)$ 前的系数,并整理,得到

$$4a_i=\left(1-\frac{\alpha}{i}\right)b_{i+1}-2(2t-1)b_i+\left(1+\frac{\alpha}{i}\right)b_{i-1},$$
$$i=1,2,\cdots,n,b_{n+1}=b_n=0.\quad(13)$$

综上,可得到关于分数阶积分(1)的数值算法如下:

$$J_{0,t}^{\alpha}f(t)\approx\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_kT_k(2t-1)\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{4k}(T_k(2t-1)-T_k(-1))\right\},\quad(14)$$

式中,$\alpha>0,t\in[0,1]$,而 a_k 及 b_k 可分别由式(4)和(13)得到.

1.2 Caputo 型分数阶导数的数值算法

下面主要讨论式(2)中 $1<\alpha<2$ 时的情况,对于 $0<\alpha<1$ 时的情况可参见文献[7].

类似于分数阶积分数值算法的讨论,仍利用移位 Chebyshev 多项式对 $f(t)$ 进行逼近

$$_CD_{0,t}^{\alpha}f(t)\approx{}_CD_{0,t}^{\alpha}p_n(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{1-\alpha}p_n^{(2)}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$1<\alpha<2,\quad(15)$$

式中,p_n 可由式(3)得到. 下面给出一个引理,其证明过程类似引理1,这里不再赘述.

引理2 记 $p_n^{(2)}$ 为式(15)的 $n-2$ 次多项式,则存在相应阶数为 $n-2$ 的多项式 L_{n-2} 满足

$$\int_x^t(p_n^{(2)}(t)-p_n^{(2)}(\tau))(t-\tau)^{1-\alpha}\mathrm{d}\tau=(L_{n-2}(t)-L_{n-2}(x))(t-x)^{2-\alpha}.\quad(16)$$

令 $x=0$,并化简,得

$$\int_0^t(t-\tau)^{1-\alpha}p_n^{(2)}(\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\frac{p_n^{(2)}(t)}{2-\alpha}-L_{n-2}(t)+L_{n-2}(0)\right)t^{2-\alpha}.$$

因此,由式(15)可以进一步得到

$$_CD_{0,t}^{\alpha}f(t)\approx{}_CD_{0,t}^{\alpha}p_n(t)=\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\left(\frac{p_n^{(2)}(t)}{2-\alpha}-L_{n-2}(t)+L_{n-2}(0)\right).\quad(17)$$

为了得到式(17)右端的具体表示,首先在式(16)两边同时对 x 求导,整理后,得

$$p_n^{(2)}(t)-p_n^{(2)}(x)=L'_{n-2}(x)(t-x)+(2-\alpha)(L_{n-2}(t)-L_{n-2}(x)).\quad(18)$$

不妨设 $L'_{n-2}(x)=\dfrac{b_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-3}b_iT_i(2x-1),0\leqslant x\leqslant1.$ 则对此式两边同时在$[x,t]$上求积,有

$$L_{n-2}(t)-L_{n-2}(x)=\sum_{i=1}^{n-2}\frac{b_{i-1}-b_{i+1}}{4i}\cdot(T_i(2t-1)-T_i(2x-1)).\quad(19)$$

然后,结合式(10),有

$$L'_{n-2}(x)(t-x)=L'_{n-2}(x)\frac{(2t-1)-(2x-1)}{2}=\frac{(2t-1)b_0-b_1}{4}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-3}(2(2t-1)b_i-b_{i+1}-b_{i-1})T_i(2x-1).\quad(20)$$

另外,记 $p'_n(x)=\dfrac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}c_kT_k(2x-1),p''_n(x)=\dfrac{d_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-2}d_kT_k(2x-1)$,则由文献[7]可知,$a_k,c_k,d_k$ 有如下关系:

$$\begin{cases}c_{k-1}=c_{k+1}+4ka_k,\\ \quad k=n,n-1,\cdots,1,\ c_{n+1}=c_n=0,\\ d_{k-1}=d_{k+1}+4kc_k,\\ \quad k=n-1,n-2,\cdots,1,\ d_n=d_{n-1}=0.\end{cases}\quad(21)$$

为了确定式(19)中的 b_i,把式(19)和(20)代入式(18),并整理,得

$$\sum_{k=1}^{n-2}d_k(T_k(2t-1)-T_k(2x-1))=\frac{(2t-1)b_0-b_1}{4}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-3}(2(2t-1)b_i-b_{i+1}-b_{i-1})T_i(2x-1)+(2-\alpha)\sum_{k=1}^{n-2}\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{4k}(T_k(2t-1)-T_k(2x-1)).$$

由于只需知道式(19)中的 $b_i,i=1,2,\cdots,n-2$,则对比上式两边 $T_k(2x-1)$ 前的系数,整理,于是得到

$$4d_k=-2(2t-1)b_k+\left(1-\frac{2-\alpha}{k}\right)b_{k+1}+\left(1+\frac{2-\alpha}{k}\right)b_{k-1},$$
$$k=1,2,\cdots,n-2,b_{n-1}=b_{n-2}=0.\quad(22)$$

综上,得到 Caputo 型的分数阶导数的数值算法如下:

$$_CD_{0,t}^{\alpha}f(t)\approx\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{d_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-2}d_kT_k(2t-1)\right)-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{4k}(T_k(2t-1)-T_k(-1))\right\},\quad(23)$$

式中,$\alpha\in(1,2),t\in[0,1]$,而 d_k,b_k 分别由式(21)和(22)决定.

我们在建立数值算法(式(23))时发现,对于 α 可进一步推广至 $\alpha>2$ 时的情况,这里不再重述其推

导过程.

2 误差分析

下面依次给出式(5)和(15)的误差分析. 由文献[7,13]可以得到

$$E_n(t) = f(t) - p_n(t) = \frac{T_{n+1}(2t-1) - T_{n-1}(2t-1)}{2\pi i}\cdot \oint_{C_r} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-t)(T_{n+1}(2z-1) - T_{n-1}(2z-1))}, \quad (24)$$

式中,$C_r: z = \frac{w + w^{-1} + 2}{4}$, $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $1 < r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 以下总假设$f(t)$在复数平面中的椭圆区域 C_r 中解析,并且$[0,1]$包含在 C_r 中.

下面给出式(5)的一致有界性,即其与 t 在区间$[0,1]$的取值无关.

引理 3　基于 Chebyshev 多项式 $p_n(t)$逼近的分数阶积分的数值算法是一致有界的,即

$$|J_{0,t}^{\alpha} f(t) - J_{0,t}^{\alpha} p_n(t)| \leqslant \frac{2M_n}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (25)$$

式中,

$$M_n = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\cdot \oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-t)(T_{n+1}(2z-1) - T_{n-1}(2z-1))}\right|\right\},\ \alpha > 0.$$

证明　注意到,$|T_{n+1}(2t-1) - T_{n-1}(2t-1)| \leqslant 2$,故$|f(t) - p_n(t)| \leqslant 2M_n$,从而结合式(5),有

$$|J_{0,t}^{\alpha} f(t) - J_{0,t}^{\alpha} p_n(t)| \leqslant 2M_n\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \frac{2M_n}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

定理 1　假设 $f(z)$ 在 C_r 上解析,则基于 Chebyshev 多项式 $p_n(t)$逼近的分数阶积分的数值算法有如下误差估计:

$$|J_{0,t}^{\alpha} f(t) - J_{0,t}^{\alpha} p_n(t)| \leqslant \frac{4Mr}{\Gamma(\alpha+1)(r-1)^2(r^n - r^{-n})} = O(r^{-n}),$$

式中,$M = \max\limits_{z\in C_r}|f(z)|$,$r$ 为大于 1 的常数.

证明　由于 $z = \frac{w + w^{-1} + 2}{4}$,且 $T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n}{2}$,所以

$$T_n(2z-1) = T_n\left(\frac{w + w^{-1}}{2}\right) = \frac{w^{-n} + w^n}{2}.$$

结合引理 3,有

$$|J_{0,t}^{\alpha} f(t) - J_{0,t}^{\alpha} p_n(t)| \leqslant \frac{2M_n}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\cdot \oint_{|w|=r}\frac{f(z)}{(z-t)}\frac{2}{(w^n - w^{-n})(w - w^{-1})}\cdot \frac{1 - w^{-2}}{4}\mathrm{d}w\right|\right\} \leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{4\pi}\oint_{|w|=r}\frac{4rM}{(r-1)^2}\cdot \frac{1}{(r^n - r^{-n})r}|\mathrm{d}w| = \frac{4Mr}{\Gamma(\alpha+1)(r-1)^2(r^n - r^{-n})} = O(r^{-n}).$$

最后,给出式(15)的误差估计. 为了讨论的方便,记

$$A_{n+1}(t) = T_{n+1}(2t-1) - T_{n-1}(2t-1),$$

$$B_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-t)A_{n+1}(z)}.$$

这样,式(24)可写成

$$E_n(t) = f(t) - p_n(t) = A_{n+1}(t)B_n(t).$$

下面给出一个引理.

引理 4　基于 Chebyshev 多项式 $p_n(t)$逼近的 Caputo 型分数阶导数的数值算法是一致有界的,即

$$|{}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) - {}_C D_{0,t}^{\alpha} p_n(t)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}(8n^2 M_{0,n} + 16n(M_{0,n} + M_{1,n}) + 2(8M_{0,n} + M_{2,n})), \quad (26)$$

式中,

$$M_{0,n} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_n(t)|,\ M_{1,n} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_n'(t)|,$$

$$M_{2,n} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_n''(t)|,\ 1 < \alpha < 2.$$

证明　由于 $E_n''(t) = A_{n+1}''(t)B_n(t) + 2A_{n+1}'(t)\cdot B_n'(t) + A_{n+1}B_n''(t)$,另外,根据 Chebyshev 多项式的相关性质,可以得到如下估计:

$$|A_{n+1}(t)| \leqslant 2,$$

$$|A_{n+1}'(t)| \leqslant 8n,$$

$$|A_{n+1}''(t)| \leqslant 8(n^2 + 2n + 2).$$

因此,

$$|{}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) - {}_C D_{0,t}^{\alpha} p_n(t)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}(|A_{n+1}''(t)|M_{0,n} + 2|A_{n+1}'(t)|M_{1,n} + |A_{n+1}|M_{2,n})\int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha}\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}(8n^2 M_{0,n} + 16n(M_{0,n} + M_{1,n}) + 2(8M_{0,n} + M_{2,n})) \leqslant \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}(8n^2 M_{0,n} + 16n(M_{0,n} + M_{1,n}) + 2(8M_{0,n} + M_{2,n})).$$

定理 2 假设 $f(z)$ 在 C_r 上解析,则基于 Chebyshev 多项式 $p_n(t)$ 逼近的 Caputo 型分数阶导数的数值算法有如下误差估计:

$$\left| {}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) - {}_C D_{0,t}^{\alpha} p_n(t) \right| \leqslant \frac{M}{\Gamma(3-\alpha)}(16r(r-1)^4 n^2 + (32r(r-1)^4 + 128r^2(r-1)^2)n + 32r(r-1)^4 + 128r^3)/((r-1)^6(r^n - r^{-n})) = O(n^2 r^{-n}),$$

式中,$M = \max\limits_{z \in C_r} |f(z)|$,$r$ 为大于 1 的常数,$1<\alpha<2$.

证明 由定理 1 的证明过程易得

$$B_n(t) = \frac{1}{4\pi i}\oint_{|w|=r} \frac{f(z)\,\mathrm{d}w}{(z-t)(w^n - w^{-n})w},$$

且

$$M_{0,n} \leqslant \frac{2rM}{(r-1)^2(r^n - r^{-n})}, \tag{27}$$

从而有

$$B'_n(t) = \frac{1}{4\pi i}\oint_{|w|=r} \frac{f(z)\,\mathrm{d}w}{(z-t)^2(w^n - w^{-n})w},$$

$$B''_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r} \frac{f(z)\,\mathrm{d}w}{(z-t)^3(w^n - w^{-n})w}.$$

对上式进行估计,有

$$M_{1,n} \leqslant \frac{8r^2 M}{(r-1)^4(r^n - r^{-n})}, \tag{28}$$

$$M_{2,n} \leqslant \frac{4^3 r^3 M}{(r-1)^6(r^n - r^{-n})}. \tag{29}$$

因此,把式(27)~(29)代入引理 4 中的式(26),整理,即可证明.

定理 1 及定理 2 中的“O”表示当 n 趋向无穷大时,数值算法误差的收敛速度的快慢. 容易看出,本工作提出的基于 Chebyshev 多项式逼近建立的分数阶积分数值算法(式(14))及 Caputo 型分数阶导数数值算法(式(23))具有较快的收敛速度.

3 数值算例

设 $f(t) = t^{\beta}$,则

$$J_{0,t}^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta},$$

$${}_C D_{0,t}^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

在式(14)中取 $\beta=4$,在式(23)中取 $\beta=5$,则可分别得到对应的 n 的分数阶积分及 Caputo 型分数阶导数的数值解,同时,将它们与文献[3]中的线性插值方法相比较.

从表 1 和表 2 中的误差结果可以发现,对本算例而言,在分数阶积分的数值格式中,$n=4$ 时的收敛速度要比 $n=2$ 时好得多;而在分数阶微分的数值格式中,$n=8$ 时的收敛速度要比 $n=4$ 时好得多. 对于其他情况,则可根据相应的 $f(t)$ 来变动 n 值. 此外,通过对比 2 种不同的计算方法的数值结果可知,本工作建立的分数阶积分及 Caputo 型分数阶导数的数值算法,即式(14)与(23),它们的收敛速度均高于文献[3]中所提及的线性插值方法,且推广了文献[7]中的数值方法.

表 1 $[J_{0,t}^{\alpha} t^4]\big|_{t=1}$ 的绝对误差

Table 1 Absolute error of $[J_{0,t}^{\alpha} t^4]\big|_{t=1}$

α	绝对误差			
	线性插值法[3]		Chebyshev 多项式逼近法(式(14))	
	$n=2$	$n=4$	$n=2$	$n=4$
0.2	6.810 969E−002	2.226 088E−002	2.652 089E−002	3.330 669E−016
0.6	1.013 351E−001	2.868 810E−002	2.709 820E−002	2.220 446E−016
1.4	5.349 327E−002	1.272 141E−002	5.929 401E−003	1.249 001E−016
1.8	3.183 041E−002	7.270 493E−003	1.188 870E−002	2.081 668E−017

表 2 $[{}_C D_{0,t}^{\alpha} t^5]\big|_{t=1}$ 的绝对误差

Table 2 Absolute error of $[{}_C D_{0,t}^{\alpha} t^5]\big|_{t=1}$

α	绝对误差			
	线性插值法[3]		Chebyshev 多项式逼近法(式(23))	
	$n=4$	$n=8$	$n=4$	$n=8$
1.2	3.600 270E−001	9.147 084E−002	7.433 626E−002	8.881 784E−016
1.4	3.912 311E−001	1.020 049E−001	2.053 614E−001	1.065 814E−014
1.6	3.802 527E−001	1.030 250E−001	4.273 832E−001	1.065 814E−014
1.8	2.787 430E−001	7.964 166E−002	7.920 905E−001	2.486 900E−014

参考文献:

[1] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. San Diego, CA: Academic Press, 1999:261-307.

[2] 徐明瑜,谭文长. 中间过程、临界现象——分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用[J]. 中国科学:G 辑,2006,36(3):225-238.

[3] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D, et al. Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2005, 194:743-773.

[4] YUAN L, AGRAWAL O P. A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives [J]. ASME J Vibr Acoust, 2002, 124:321-324.

[5] DIETHELM K. An improvement of a nonclassical numerical method for the computation of fractional derivatives [J]. Numer Algor, 2009, 131(1):014502-4.

[6] MIYAKODA T. Discretized fractional calculus with a series of Chebyshev polynomial [J]. Electronic Notes Theor Comput Sci, 2009, 225:239-244.

[7] SUGIURA H, HASEGAWA T. Quadrature rule for Abel's equations: uniformly approximating fractional derivatives [J]. J Comput Appl Math, 2009, 223:459-468.

[8] HASEGAWA T, SUGIURA H. Uniform approximation to fractional derivatives of functions of algebraic singularity [J]. J Comput Appl Math, 2009, 228:247-253.

[9] LI C P, CHEN A, YE J J. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation [J]. J Comput Phys, 2011, 230(9):3352-3368.

[10] ZHENG Y Y, LI C P, ZHAO Z G. A note on the finite element method for the space-fractional advection diffusion equation [J]. Comput Math Appl, 2010, 59(5):1718-1726.

[11] ZHENG Y Y, LI C P, ZHAO Z G. A fully discrete discontinuous Galerkin method for nonlinear fractional Fokker-Planck equation [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2010, doi:10.1155/2010/279038.

[12] LI C P, ZHAO Z G. Numerical approximation of nonlinear fractional differential equations with subdiffusion and superdiffusion [J]. Comput Math Appl, 2011, 62(3):855-875.

[13] ELLIOTT D. Truncation errors in two Chebyshev series approximations [J]. Math Comput, 1965, 19:234-248.